S1 MPI-PCST

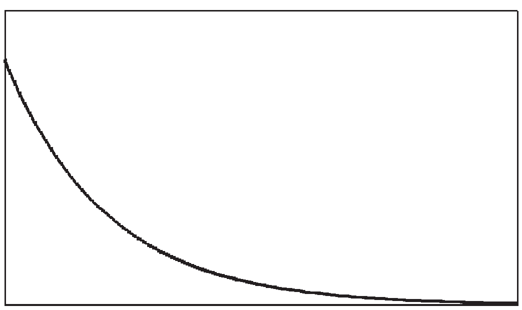
Phys101

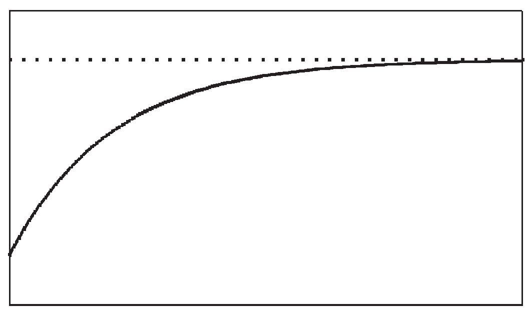
Université Paris-Sud 11

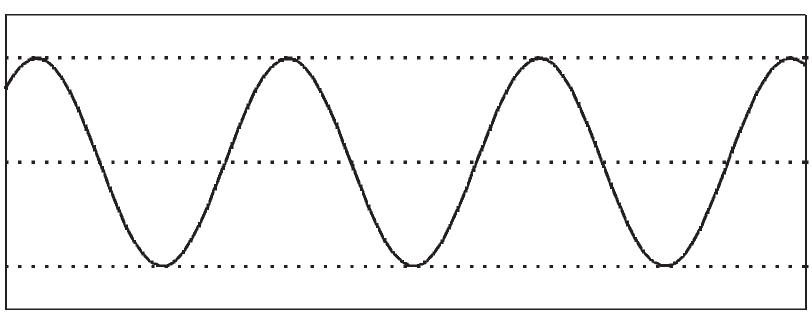
Centre d'Orsay

Lois d'évolution en physique

(Résumé du cours)







2012-2013

LOIS D'ÉVOLUTION EN PHYSIQUE

(Résumé du cours)

I- Principes généraux

1. Objectifs et méthodes de la physique

Le but de la physique est de décrire et de comprendre les phénomènes de la nature et de l'univers.

Long développement historique depuis l'antiquité. Rôle de Galilée (1564-1642) dans la clarification des méthodes de la physique moderne.

1) Rassembler le plus que possible des données et des observations au sujet d'un phénomène, afin de délimiter le nombre de grandeurs qui entrent dans sa description. Déterminer *les variables pertinentes* et *le nombre de degrés de liberté* correspondant. Mais cette démarche dépend de la précision recherchée. Nécessité de définir un *système isolé*.

2) Par des *expériences* répétées, rassembler des données *quantitatives* sur le phénomène avec les grandeurs retenues.

3) Par le travail de la déduction et de l'imagination, trouver une *loi mathématique* qui puisse correspondre aux données relevées.

4) Confronter la loi trouvée à d'autres expériences. a) La loi continue d'être vérifiée ; son domaine d'applicabilité s'élargit. b) Un nouveau type d'expérience peut invalider la loi ; dans ce cas, il faut la modifier ou la compléter ou délimiter son domaine d'applicabilité.

2. Développement historique

Progrès décisif avec Newton (1642-1727), qui introduit le calcul infinitésimal et l'analyse (1669), en définissant les notions de *fonctions continues* et de *dérivées*. Leibniz (1646-1716) introduit le *calcul différentiel* (1684).

Newton énonce ses trois lois (Principia, 1687). 1) La loi d'inertie. 2) Équation du mouvement : Masse$\times$accélération=Force extérieure appliquée. 3) Égalité de l'action et de la réaction. Newton découvre aussi la loi de la gravitation.

Les lois de la mécanique et de la physique s'écrivent désormais sous la forme *d'équations différentielles*.

3. Grandeurs fondamentales

Pour décrire les divers phénomènes et événements, la physique a besoin de définir des grandeurs fondamentales ou élémentaires, en fonction desquelles toutes les autres grandeurs peuvent être exprimées. Les grandeurs fondamentales, au nombre de sept, sont irréductibles entre elles. On définit aussi les *unités de référence* de ces grandeurs.

1) La longueur $[L]$. Définit l'espace. Unité de référence : le mètre (m).

2) Le temps $[T]$. Définit la notion d'évolution. Unité : la seconde (s).

3) La masse $[M]$. Définit la quantité de matière. Unité : le kilogramme (kg).

4) L'intensité électrique $[I]$. Définit les phénomènes électriques et magnétiques. Unité : l'Ampère (A).

5) La température $[\theta]$. Définit la chaleur et l'agitation thermique des atomes. Unité : le kelvin (K).

6) Le nombre d'atomes ou de molécules $[N]$. Définit la structure microscopique de la matière. Unité : le nombre d'atomes ou de molécules ou éventuellement la mole (mol).

7) L'intensité lumineuse $[J]$. Définit la luminosité d'un rayonnement. Unité : le candéla (cd).

La *dimension* d'une grandeur est définie par l'expression de cette grandeur en fonction des sept grandeurs fondamentales, en faisant abstraction des constantes numériques multiplicatives. La dimension d'une grandeur G est ainsi une fonction homogène des dimensions des grandeurs fondamentales :

$$[G] = L^{\alpha_1} T^{\alpha_2} M^{\alpha_3} I^{\alpha_4} \theta^{\alpha_5} N^{\alpha_6} J^{\alpha_7}.$$

Exemples. Volume V : $[V] = L^3$. Vitese v : $[v] = LT^{-1}$. Accélération a : $[a] = LT^{-2}$. Force F : $[F] = MLT^{-2}$. Énergie E : $[E] = [FL] = ML^2T^{-2}$. Charge électrique Q : $[Q] = IT$.

Tous les termes additifs d'une équation de la physique doivent avoir la même dimension. On ne peut additionner deux termes de dimensions différentes.

II- Rappels d'analyse

Dérivée, différentielle, intégrale

Fonction $y = f(x)$. On considère deux valeurs de x : x_1 et x_2. $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. On pose : $x_2 = x_1 + \Delta x$, $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$. Lorsque $\Delta x \to 0$, il s'ensuit que $\Delta y \to 0$. Mais le rapport $\Delta y / \Delta x$ tend en général vers une valeur finie, qui définit la dérivée de y au point x_1, notée $y'(x_1)$ ou $\dot{y}(x_1)$ ou $\frac{dy}{dx}|_{x=x_1}$. Comme x_1 est arbitraire, ces définitions et résultats sont valables quel que soit x.

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Du point de vue géométrique, la dérivée est égale à la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point x.

En séparant dy et dx de la fraction $\frac{dy}{dx}$, on définit la différentielle de y :

$$dy = y'(x)dx.$$

dy est la différentielle de y. dx est une quantité qu'on peut choisir aussi petite qu'on veut. On voit que si $dx \to 0$, alors $dy \to 0$, mais en général leur rapport est fini et égal à la dérivée.

Dérivée d'un produit :

$$y(x) = u(x)v(x); \qquad y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

En écrivant les dérivées en fonction des différentielles, on obtient :

$$dy = vdu + udv.$$

La primitive d'une fonction $y(x)$ est la fonction $Y(x)$ dont la dérivée est $y(x)$: $Y'(x) = y(x)$. Comme la dérivée d'une constante est nulle, la primitive est définie à une constante additive près.

L'intégrale indéfinie d'une fonction $y(x)$, notée $\int^x dx'\, y(x')$, est la primitive de $y(x)$:

$$\int^x dx'\, y(x') = Y(x).$$

L'intégrale définie de la fonction $y(x)$ entre les points d'abscisses a et b est la différence entre les valeurs de la primitive de $y(x)$ aux points d'abscisses b et a :

$$\int_a^b dx'\, y(x') = Y(b) - Y(a).$$

Géométriquement, elle est égale à l'aire de la surface comprise entre la courbe $y(x)$ et l'axe des x pour x compris entre a et b.

L'intégrale d'une dérivée y' est y, puisque y est la primitive de y' :

$$\int^x dx\, y'(x) = y(x); \qquad \int_a^b dx\, y'(x) = y(b) - y(a).$$

Intégration par parties : c'est une conséquence directe de la formule de la dérivée d'un produit et de la primitive d'une dérivée :

$$\int_a^b dx\, u'(x)v(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b dx\, u(x)v'(x).$$

III- Électrocinétique

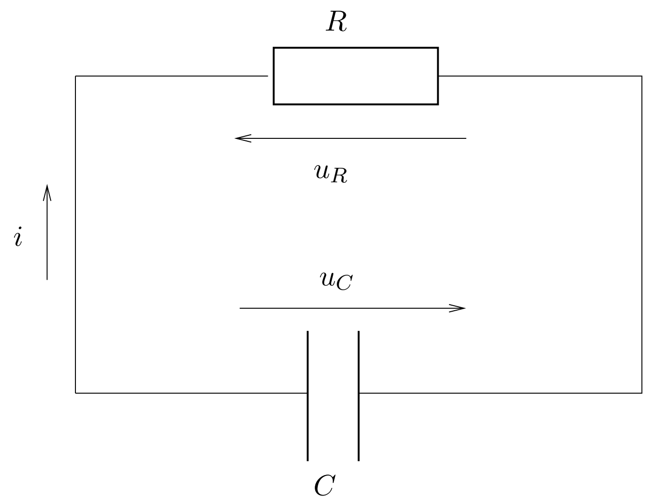
1. Décharge d'un condensateur dans une résistance

Circuit constitué d'un condensateur de capacité C et d'un résistor de résistance R. $q(t)$: charge d'une des plaques du condensateur à l'instant t ; la plaque opposée porte alors la charge $-q(t)$. L'intensité du courant dans le circuit est désigné par $i(t)$; $i(t)$ se dirige des charges positives vers les charges négatives ; représente le sens opposé à la vitesse des électrons.

Relation entre l'intensité du courant et la charge $q(t)$:

$$i(t) = \frac{dq}{dt}.$$

Elle signifie que la charge $q(t)$ se trouve sur la plaque où arrive le courant i ; en effet un accroissement infinitésimal dq de la charge pendant un temps dt est alors égal à idt. Le choix du sens positif du courant est arbitraire ; seule la solution du problème détermine le sens réel du courant d'après son signe par rapport à la convention initiale.

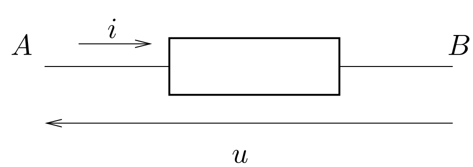


Tensions aux bornes des dipôles. Dipôle avec extrémités A et B. Le courant i entre par A et sort par B. V_A et V_B sont les potentiels électriques ou tensions en A et B respectivement.

Convention récepteur. La tension aux bornes du dipôle, désignée par u, est égale à la différence de potentiel entre les points d'entrée et de sortie du courant :

$$u = V_A - V_B.$$

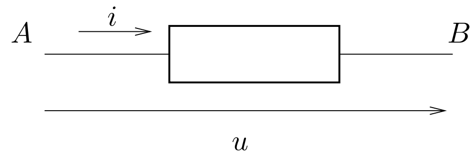
Elle est représentée sur les figures par une flèche dirigée de B (sortie) vers A (entrée).



Convention générateur. La tension aux bornes du dipôle est égale à la différence de potentiel entre les points de sortie et d'entrée du courant :

$$u = V_B - V_A.$$

Elle est représentée sur les figures par une flèche dirigée de A (entrée) vers B (sortie).



Loi des mailles. En convention récepteur, la somme des tensions de tous les dipôles (y compris les générateurs) d'un circuit fermé est égal à zéro :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 0.$$

Pour le circuit condensateur-résistance :

$$u_R = Ri, \qquad u_C = \frac{q}{C}.$$

La loi des mailles s'écrit $u_R + u_C = 0$, soit :

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Diviser l'équation par R :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0.$$

Comparer les dimensions des deux termes du premier membre de l'équation :

$$[RC] = T.$$

RC définit le temps caractéristique τ (ou l'unité naturelle de temps) de l'évolution du système :

$$\tau = RC.$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{\tau}.$$

C'est une équation différentielle du premier ordre (dérivée première), linéaire (q et $\frac{dq}{dt}$ apparaissent linéairement), à un degré de liberté (q), sans second membre (pas de terme indépendant de q).

$\dot{q} \equiv \frac{dq}{dt}$ est proportionnelle à q. Seule la fonction exponentielle vérifie cette propriété.

$$q(t) = Ce^{-t/\tau},$$

où C est une constante arbitraire. La solution générale d'une équation différentielle du premier ordre dépend toujours d'une constante arbitraire, qui ne peut être fixée que si on précise la condition initiale, à $t = 0$ par exemple (on pourrait aussi choisir la condition initiale à $t = t_0$). On suppose que la charge q de l'armature considérée du condensateur est égale à q_0 à l'instant initial $t = 0$. On obtient :

$$q(0) = C = q_0.$$

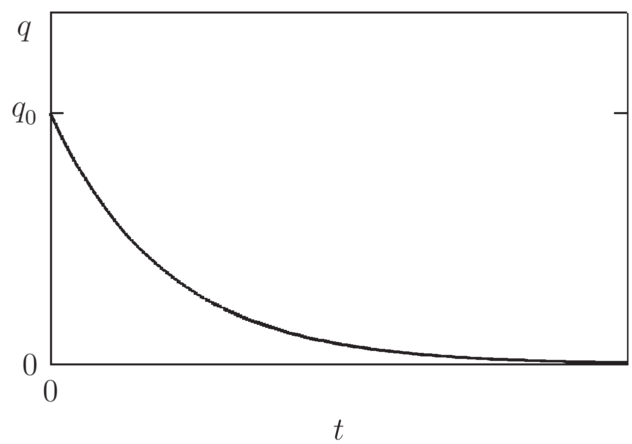
D'où :

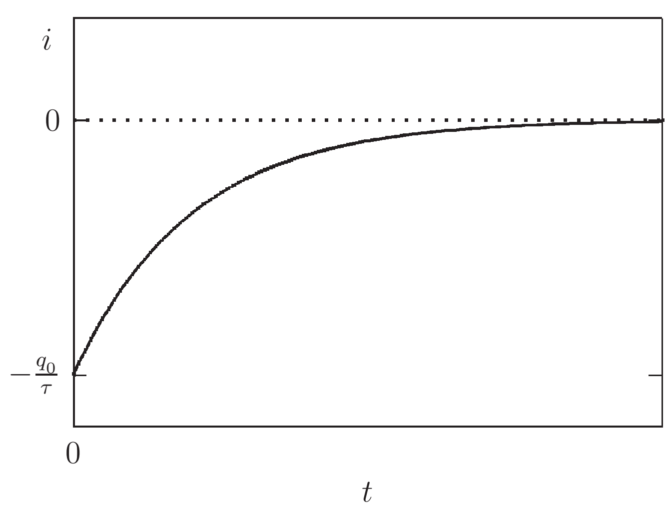
$$q(t) = q_0 e^{-t/\tau}.$$

L'intensité du courant est :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{\tau} e^{-t/\tau}.$$

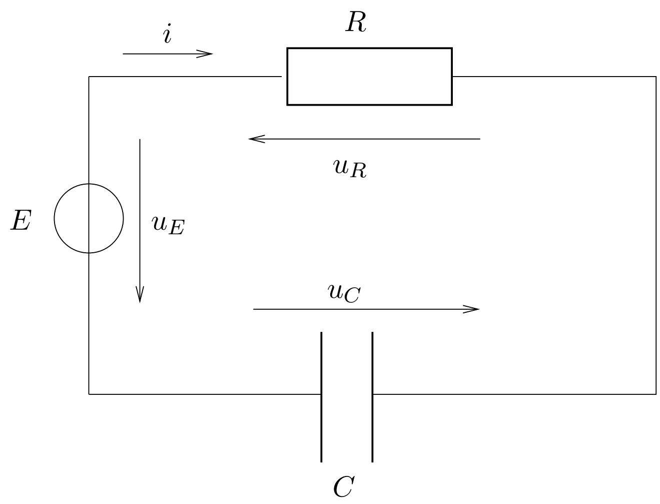
La fonction exponentielle étant toujours positive, on remarque que $q(t)$ garde toujours le même signe que celui de q_0, alors que l'intensité $i(t)$ est de signe opposée. Si, par exemple, q_0 est positive, $i(t) = \frac{dq}{dt}$ est négative et $q(t)$ est une fonction décroissante au cours du temps et tend rapidement vers 0. $i(t)$, dont la valeur initiale est égale à $-q_0/\tau$, est une fonction croissante et tend aussi vers 0. Les propriétés de croissance et de décroissance sont interchangées lorsque q_0 est négative.





2. Charge d'un condensateur

On ajoute dans le circuit un générateur de force électromotrice E constante.



En convention récepteur, on a : $u_E = -E$. Loi des mailles : $u_R + u_C + u_E = 0$, qui s'écrit aussi

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E.$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}.$$

C'est une équation différentielle du premier ordre linéaire avec second membre constant (E/R). Méthode de résolution simple dans ce cas. On effectue un changement de fonction en posant :

$$Q = q - EC; \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dQ}{dt} = \frac{dq}{dt}.$$

L'équation de Q devient :

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{\tau}.$$

Solution générale :

$$Q(t) = Ke^{-t/\tau}.$$

K : constante arbitraire. La solution en q devient :

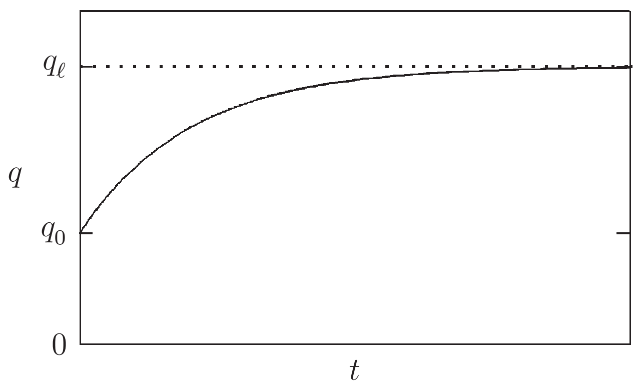
$$q(t) = EC + Ke^{-t/\tau}.$$

On fixe K par la condition initiale $q(0) = q_0$:

$$q(t) = EC + (q_0 - EC)e^{-t/\tau}.$$

Lorsque $t \gg \tau$, l'exponentielle devient négligeable et q tend vers une valeur limite constante

$$q(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} q_{lim} \equiv q_\ell = EC.$$

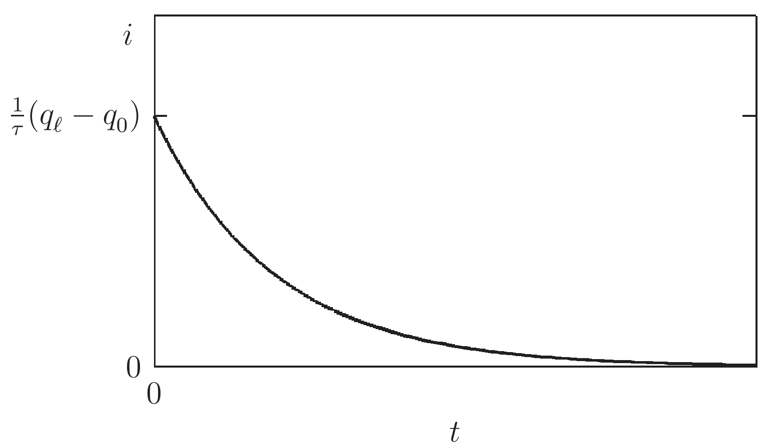


$$q(t) = q_\ell + (q_0 - q_\ell)e^{-t/\tau}.$$

On trouve pour l'intensité :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\tau}(q_0 - q_\ell)e^{-t/\tau}.$$

Elle tend vers zéro lorsque t augmente.



3. Charge et décharge d'un condensateur

On peut alterner les phases de charge et de décharge du condensateur en introduisant puis en enlevant le générateur, etc. On considère ci-dessous une seule phase de charge et de décharge. Le condensateur est chargé jusqu'à l'instant t_0, puis déchargé. Pendant la phase de charge on a :

$$q(t) = q_\ell + (q_0 - q_\ell)e^{-t/\tau}, \qquad 0 \le t \le t_0,$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\tau}(q_0 - q_\ell)e^{-t/\tau}.$$

Pendant la phase de décharge :

$$q(t) = Ke^{-t/\tau} \qquad t_0 \leq t.$$

K est fixé par la condition de raccordement à l'instant $t = t_0$, en imposant la condition de continuité de q entre les deux solutions précédentes :

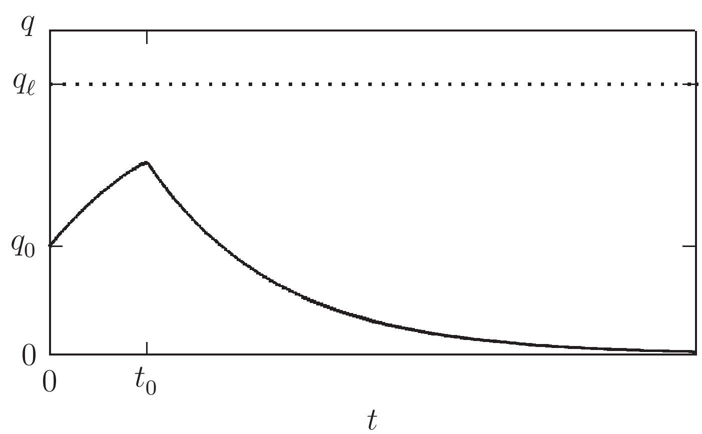
$$Ke^{-t_0/\tau} = q_\ell + (q_0 - q_\ell)e^{-t_0/\tau},$$

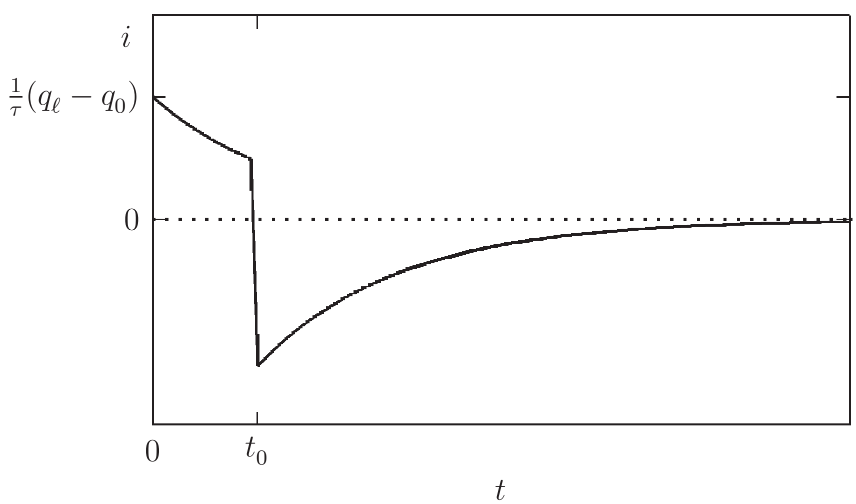
d'où $K = q_\ell e^{t_0/\tau} + (q_0 - q_\ell)$ et

$$q(t) = \left[q_\ell e^{t_0/\tau} + (q_0 - q_\ell)\right]e^{-t/\tau}, \qquad t_0 \leq t,$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\tau}\left[q_\ell e^{t_0/\tau} + (q_0 - q_\ell)\right]e^{-t/\tau}.$$

q est continue en $t = t_0$, mais i y est discontinue.





4. Méthode générale de résolution d'une équation différentielle du 1^er^ordre avec second membre

Lorsque le second membre de l'équation différentielle n'est pas une constante, la méthode précédente de changement de fonction par translation n'est plus applicable. Il faut utiliser ume méthode plus générale. Soit $f(t)$ le second membre de l'équation différentielle :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = f(t).$$

Soit $q_1(t)$ une solution particulière de cette équation, qu'on arrive à deviner ou à trouver d'après l'expression de f. Une solution particulière ne dépend pas de constante arbitraire, contrairement à la solution générale, laquelle en dépend. La solution particulière vérifie l'équation

$$\frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{\tau} = f(t).$$

Considérons la différence de la solution générale q et de la solution particulière q_1. Elle vérifie l'équation :

$$\frac{d(q - q_1)}{dt} + \frac{(q - q_1)}{\tau} = 0.$$

Donc $(q - q_1)$ est la solution générale de l'équation sans second membre :

$$\widetilde{q} \equiv q - q_1; \qquad \frac{d\widetilde{q}}{dt} + \frac{\widetilde{q}}{\tau} = 0.$$

D'où :

$$q = \widetilde{q} + q_1.$$

La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est égale à la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Elle dépend toujours d'une constante arbitraire qu'il faut fixer à partir de la condition initiale (appliquée à q et non à $\widetilde{q}$).

Méthode facilement applicable lorsque le second membre est une constante. Dans ce cas, la solution particulière est aussi une constante. On peut l'appliquer au cas où $f = E/R$. Solution particulière : $q_1 = E\tau/R = EC$. Solution générale de l'équation sans second membre : $\widetilde{q} = Ke^{-t/\tau}$. D'où la solution générale : $q(t) = EC + Ke^{-t/\tau}$, la même que trouvée précédemment.

Autres exemples. Lorsque le second membre est une fonction exponentielle, on peut chercher la solution particulière sous la forme d'une fonction exponentielle. Lorsque le second membre est une fonction sinusoïdale, du type $A\cos(\omega t)$ ou $B\sin(\omega t)$, on cherche la solution particulière sous la forme d'une combinaison de fonctions cosinus et sinus.

On considère ce dernier cas.

$$f(t) = \frac{E_0}{R}\cos(\omega t).$$

On cherche la solution particulière sous la forme

$$q_1(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

On remplace cette expression dans l'équation différentielle ; on regroupe ensemble toutes les fonctions cosinus et sinus ; les coefficients globaux des fonctions indépendantes cosinus et sinus doivent être nuls. On obtient :

$$A = \frac{E_0 C}{1+\omega^2\tau^2}, \qquad B = \frac{E_0 C\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}.$$

En ajoutant la solution générale de l'équation sans second membre, qui est toujours la fonction exponentielle décroissante, on obtient pour la solution générale de l'équation avec second membre :

$$q(t) = \tilde{q} + q_1 = Ke^{-t/\tau} + \frac{E_0 C}{(1+\omega^2\tau^2)}\Big[\cos(\omega t) + \omega\tau\sin(\omega t)\Big].$$

La constante K est déterminée par la condition initiale $q(0) = q_0$. A noter que lorsque $t \gg \tau$, l'exponentielle est négligeable et $q(t)$ tend asymptotiquement vers la solution particulière oscillatoire, qui représente le *mouvement forcé*. Le régime asymptotique représente en général le *régime permanent*.

IV- Radioactivité

1. Loi de désintégration radioactive

Certains noyaux, dits instables, se désintégrent spontanément en donnant naissance à un ou à plusieurs autres noyaux et éventuellement à un électron et à un antineutrino.

Radioactivité β :

$${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + e^- + \bar{\nu}.$$

Radioactivité α :

$${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He.$$

Exemples :

$$n \to p + e^- + \bar{\nu},$$

$${}^{235}_{92}U \longrightarrow {}^{231}_{90}Th + {}^{4}_{2}He,$$

$${}^{231}_{90}Th \longrightarrow {}^{231}_{91}Pa + e^- + \bar{\nu}.$$

La radioactivité est un phénomène de la physique quantique et les paramètres qui entrent dans sa description ne peuvent être calculés que dans le cadre de la Mécanique Quantique. Néanmoins, la loi de la radioactivité peut être établie dans le cadre de la Physique Statistique, en admettant certaines propriétés générales.

Propriétés de la radioactivité.

1) Phénomène spontané, imprévisible dans le temps au niveau d'un noyau. Chaque noyau se désintégre à un moment ou à un autre, mais on ne peut prédire par avance le moment exact de sa désintégration.

2) On ne peut qu'associer une *probabilité de désintégration par unité de temps* (appelée aussi densité de probabilité temporelle) à chaque noyau.

On désigne par λ la probabilité de désintégration par unité de temps d'un type de noyau donné. 1) λ est la même pour tous les noyaux d'un même type. 2) λ est une constante dans le temps ; c'est une conséquence de l'homogénéité du temps ; λ ne dépend pas de l'âge du noyau.

Si λ est la probabilité de désintégration par unité de temps d'un noyau, sa probabilité ΔP de désingration dans un intervalle de temps Δt petit est :

$$\Delta P = \lambda \Delta t.$$

Si un échantillon contient N noyaux à l'instant t (N est très grand), ceci signifie que pendant l'intervalle de temps Δt qui va suivre, $|\Delta N|$ noyaux vont se désintégrer, où ΔN représente la variation de N pendant le temps Δt. $|\Delta N|$ est égal à $N\Delta P = N(t)\lambda\Delta t$. Comme N diminue au cours du temps, sa variation ΔN est négative :

$$\Delta N(t) = -N(t)\Delta P = -N(t)\lambda\Delta t.$$

En prenant la limite du continu, $N(t) \to$ fonction continue, et la limite infinitésimale, $\Delta t \to dt$, $\Delta N \to dN$, on obtient :

$$dN(t) = -\lambda N(t) dt,$$

ou

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N.$$

C'est une équation différentielle du premier ordre (dérivée première), linéaire (N et $\frac{dN}{dt}$ apparaissent linéairement), à un degré de liberté (N), sans second membre (pas de terme indépendant de N).

Taux instantané de croissance : $\frac{1}{N}(\frac{dN}{dt})$ (quantité algébrique ; ici, négative égale à $-\lambda$).

2. Résolution de l'équation

Équation similaire à celle de la décharge d'un condensateur dans une résistance. Solution en fonction exponentielle :

$$N(t) = Ce^{-\lambda t},$$

où C est une constante arbitraire, qui ne peut être fixée que si on précise la valeur initiale de N. On suppose que le nombre des noyaux à $t = 0$ est N_0. On obtient :

$$N(0) = C = N_0.$$

D'où :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

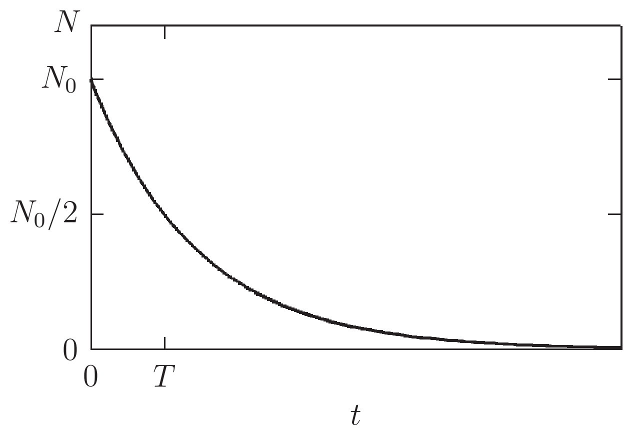
On a en général : $\frac{dN}{dt} < 0$; la courbe est constammenet décroissante.

Période ou *demi-vie* T : temps au bout duquel N diminue de moitié :

$$N(t+T) = \frac{N(t)}{2}.$$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

T définit l'unité naturelle de temps (ou l'échelle de temps ou l'unité adaptée de temps) du processus de radioactivité (à ne pas confondre avec l'unité de référence du temps du Système International qui est la seconde).



Activité A : nombre de désintégrations par unité de temps.

$$A = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

Unités : Becquerel (Bq) ; 1 Bq=1 dés./s. Curie (Ci) ; 1 Ci=$3,7 \times 10^{10}$ dés./s ; correspond approximativement à l'activité de 1 g de radium 226.

Durée de vie moyenne τ par noyau : Durée de vie totale de tous les noyaux divisée par le nombre total N_0 des noyaux.

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

Échelle semi-logarithmique.

$$\ln N(t) = \ln N_0 - \lambda t.$$

Droite avec pente négative donnée par $-\lambda$.

3. Cas discret. Suite géométrique et fonction exponentielle

Au niveau expérimental, les mesures physiques se font en général à des intervalles de temps discrets. On n'a qu'un ensemble discret de points expérimentaux.

Taux instantané de croissance : $\frac{1}{N}\frac{\Delta N}{\Delta t}$.

Au niveau discret, la fonction exponentielle est représentée par une *suite géométrique*.

Éléments de la suite géométrique : y_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, définis avec des intervalles Δt. Raison r de la suite :

$$r_{\Delta t} = \frac{y_{n+1}}{y_n}.$$

r dépend de Δt, car si Δt varie, les valeurs de y_n changent ; mais r ne dépend pas de n. y_0 correspond à $t = t_0 = 0$, y_n à $t_n = n\Delta t$.

$$\frac{y_1}{y_0} = r, \quad \frac{y_2}{y_1} = r, \ \ldots, \ \frac{y_{n+1}}{y_n} = r, \ \ldots \ .$$

$$\frac{y_n}{y_0} = r^n = r^{\frac{t_n}{\Delta t}} = r^{\frac{t}{\Delta t}} = \left(e^{\ln r}\right)^{\frac{t}{\Delta t}} = e^{\frac{t}{\Delta t}\ln r}.$$

En prenant la limite $\Delta t \to 0$, on passe à la limite continue $t_n \to t$, $y_n \to y(t)$. On retrouve pour y une fonction exponentielle si dans cette limite $\frac{\ln r}{\Delta t} \to \alpha$ =const. Ceci n'est possible que si $\ln r \to \alpha\Delta t$. r doit avoir la dépendance suivante en Δt : $r = 1 + \alpha\Delta t$, car pour $\alpha\Delta t \ll 1$, on a $\ln(1 + \alpha\Delta t) \simeq \alpha\Delta t$. $\frac{y_{n+1}}{y_n} = r = 1 + \alpha\Delta t$. La limite continue de la suite est :

$$y(t) = y_0 e^{\alpha t}.$$

Développement limité. Les résultats précédents ont été obtenus en utilisant l'approximation du développement limité d'une fonction autour d'un point donné. Il est obtenu en partant de la définition de la dérivée d'une fonction $y(t)$ par rapport à la variable t :

$$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = \lim_{a\to 0}\frac{y(t+a) - y(t)}{a}.$$

L'approximation consiste à ne pas prendre la limite $a \to 0$ et à remplacer a par une valeur finie mais petite (en module) devant le temps caractéristique T d'évolution de $y(t)$:

$$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} \simeq \frac{y(t+a) - y(t)}{a}, \qquad |a| \ll T.$$

En multipliant les deux membres par a, on obtient :

$$y(t+a) \simeq y(t) + a\dot{y}(t), \qquad |a| \ll T.$$

Pour la fonction $\ln(t)$, vue plus haut, il faut remplacer dans la formule précédente t par la valeur particulière 1 et a par $\alpha\Delta t$.

4. Résolution numérique d'une équation différentielle. Méthode d'Euler

Équation à résoudre :

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = f(y).$$

$f(y)$ est une fonction connue de y. (Dans le cas de la radioactivité, $f(N) = -\lambda N$.) Diviser l'axe du temps en intervalles discrets de valeur Δt petite devant celle du temps caractéristique τ ou T du problème ($\Delta t \ll \tau$). Instant initial : $t = t_0 = 0$; $t_1 = \Delta t, \ldots,$ $t_n = n\Delta t$. Condition initiale : $y(0) = y_0$. On fait l'approximation du passage du continu au discret par l'utilisation du développement limité :

$$y(t + \Delta t) \simeq y(t) + \dot{y}(t)\Delta t = y(t) + f(y)\Delta t.$$

On applique cette formule pas à pas.

$$y(t_1) = y_1 = y(t_0 + \Delta t) = y_0 + f(y_0)\Delta t,$$

$$y(t_2) = y_2 = y(t_1 + \Delta t) = y_1 + f(y_1)\Delta t,$$

$$y(t_3) = y_2 = y(t_2 + \Delta t) = y_2 + f(y_2)\Delta t,$$

$$y(t_n) = y_n = y(t_{n-1} + \Delta t) = y_{n-1} + f(y_{n-1})\Delta t.$$

On obtient ainsi toutes les valeurs de y_i. On trace la courbe continue qui passe par ces points. Plus Δt est petit, plus la précision est grande.

Exemple de la fonction exponentielle.

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y; \qquad \Longrightarrow f(y) = -\lambda y.$$

$$y_n = y_{n-1} - \lambda y_{n-1}\Delta t = y_{n-1}(1 - \lambda\Delta t) = y_{n-1}(1 - \frac{\Delta t}{\tau}).$$

On vérifie que la résolution numérique reproduit la suite géométrique :

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = 1 - \frac{\Delta t}{\tau} = r.$$

V- Filiation radioactive

En physique on rencontre souvent des équations couplées entre plusieurs grandeurs physiques en évolution. C'est le cas notamment lorsque plusieurs particules ou plusieurs grandeurs interagissent mutuellement. On obtient dans ce cas un système d'équations différentielles couplées faisant intervenir plusieurs variables indépendantes ou *plusieurs degrés de liberté*. La résolution de tels systèmes d'équations n'est généralement pas possible analytiquement ; mais dans certains cas simples on arrive à découpler les équations d'une façon systématique et à les résoudre analytiquement. C'est le cas notamment des désintégrations radioactives en chaîne qu'on traitera dans la suite.

Généralement les noyaux radioactifs donnent naissance par désintégration à d'autres noyaux radioactifs qui à leur tour se désintégrent par radioactivité. On assiste à une chaîne de désintégrations, qu'on appelle *filiation radioactive*. L'uranium ${}^{238}_{92}U$, par exemple, produit par désintégration une chaîne de 13 noyaux intermédiaires radioactifs successifs, avant que ne se produise le dernier noyau stable de la chaîne, le plomb ${}^{206}_{82}Pb$:

$$ {}^{238}_{92}U \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_{13} \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb. $$

Nous étudierons le cas le plus simple d'une chaîne avec trois éléments :

$$ A \longrightarrow B \longrightarrow C, $$

le noyau C étant stable. N_A, N_B, N_C : nombre des noyaux respectivement du type A, B, C, à l'instant t. Il faut utiliser la loi de conservation du nombre total des noyaux. Chaque noyau A qui se désintègre donne naissance à un noyau B ; chaque noyau B qui se désintègre donne naissance à un noyau C. λ_A, λ_B : constantes radioactives respectivement des noyaux du type A et B. Par unité de temps, il y a $\lambda_A N_A$ noyaux A qui se désintègrent, donc une même quantité de noyaux B qui se créent ; de même, $\lambda_B N_B$ noyaux B qui se désintègrent par unité de temps et un nombre égal de noyaux C qui se créent.

$$ \frac{dN_A}{dt} = -\lambda_A N_A, $$

$$ \frac{dN_B}{dt} = -\lambda_B N_B + \lambda_A N_A, $$

$$ \frac{dN_C}{dt} = +\lambda_B N_B. $$

On vérifie que

$$ \frac{d}{dt}\Big(N_A + N_B + N_C\Big) = 0, $$

impliquant $\Big(N_A + N_B + N_C\Big) =$ const., ce qui traduit la conservation du nombre total des noyaux de tous types au cours du temps.

Solution de la première équation, avec la condition initiale $N_A(0) = N_{A0}$:

$$ N_A(t) = N_{A0} e^{-\lambda_A t}. $$

On reporte cette solution dans l'équation de N_B :

$$ \frac{dN_B}{dt} = -\lambda_B N_B + \lambda_A N_{A0} e^{-\lambda_A t}. $$

C'est une équation différentielle du 1[er] ordre linéaire avec second membre (le dernier terme). On cherche une solution particulière de l'équation sous la forme d'une exponentielle similaire au second membre :

$$N_{B1} = Ce^{-\lambda_A t},$$

C étant une constante. On remplace cette expression dans l'équation ; on détermine C :

$$C = \frac{\lambda_A N_{A_0}}{\lambda_B - \lambda_A}.$$

$$N_{B1} = \frac{\lambda_A N_{A_0}}{\lambda_B - \lambda_A} e^{-\lambda_A t}.$$

L'équation sans second membre :

$$\frac{d\widetilde{N}_B}{dt} = -\lambda_B \widetilde{N}_B.$$

Solution générale de cette équation :

$$\widetilde{N}_B = C' e^{-\lambda_B t},$$

C' étant une constante. Solution générale de l'équation avec second membre :

$$N_B = \widetilde{N}_b + N_{B_1} = C' e^{-\lambda_B t} + \frac{\lambda_A N_{A_0}}{\lambda_B - \lambda_A} e^{-\lambda_A t}.$$

Condition initiale : $N_B(0) = 0$; $\Longrightarrow C' = -\lambda_A N_{A_0}/(\lambda_B - \lambda_A)$.

$$N_B(t) = \frac{\lambda_A N_{A_0}}{\lambda_B - \lambda_A}\Big(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\Big).$$

On reporte cette expression dans l'équation de N_C et on intègre entre $t' = 0$ et $t' = t$, avec la condition initiale $N_C(0) = 0$:

$$N_C(t) = N_{A0}\Big[1 - \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} e^{-\lambda_A t} + \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} e^{-\lambda_B t}\Big].$$

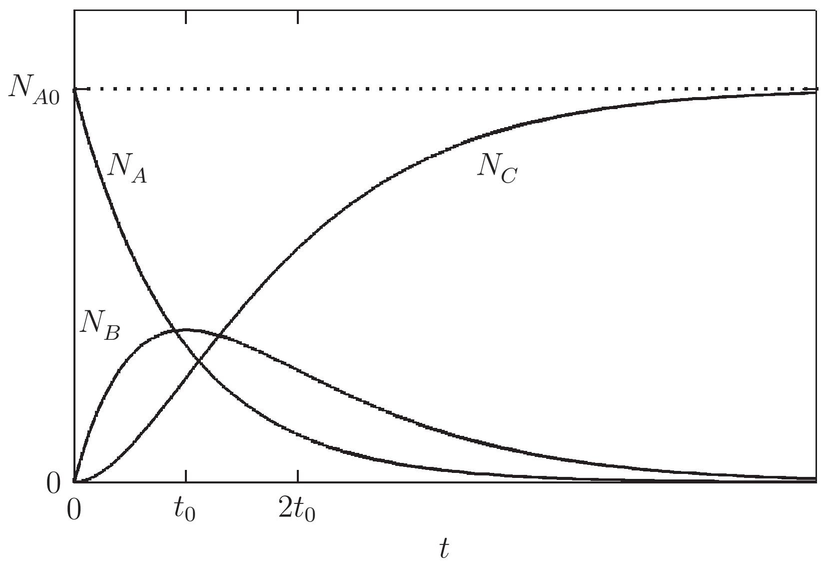
On vérifie la loi de conservation du nombre total des noyaux :

$$N_A(t) + N_B(t) + N_C(t) = N_{A0}.$$

$N_B(t)$ possède un maximum à un instant t_0. On calcule $\frac{dN_B(t)}{dt}$ et on impose son annulation pour $t = t_0$. On trouve :

$$t_0 = \frac{1}{(\lambda_B - \lambda_A)} \ln\Big(\frac{\lambda_B}{\lambda_A}\Big) = \frac{1}{\ln 2}\Big(\frac{T_A T_B}{T_A - T_B}\Big) \ln\Big(\frac{T_A}{T_B}\Big),$$

qui est positif, quelles que soient les valeurs de T_A et de T_B. Pour t grand, comparé aux périodes T_A et T_B, N_A et N_B tendent vers 0, tandis que N_C tend vers N_{A0}.



Activité A : nombre de désintégrations par unité de temps.

$$A_A = \lambda_A N_A, \quad A_B = \lambda_B N_B, \quad A_C = 0.$$

L'équation de N_B s'écrit aussi : $\frac{dN_B}{dt} = -A_B + A_A$. A $t = t_0$, $\frac{dN_B}{dt}$ est nul, ce qui entraîne l'égalité des activités des noyaux du type A et du type B à cet instant.

VI- Mouvement amorti

1. Action d'un milieu fluide sur un corps plongé en son sein

Milieu fluide (gaz ou liquide) électriquement neutre et au repos. Exerce une action de résistance au corps plongé en son intérieur. 1) Une force *statique*, qui ne dépend pas de la vitesse du corps et est représentée par la *pression* exercée sur le corps. Exemple : la force d'Archimède. Force orthogonale à la surface du corps en chacun de ses points. 2) Une force *non-statique*, qui se manifeste uniquement lorsque le corps est en mouvement. Elle tend à freiner le mouvement du corps. Cette force dépend des caractéristiques du milieu, de la géométrie du corps (mais non de sa masse) et de sa vitesse. Elle se décompose en une composante parallèle à la vitesse et de sens opposé, appelée *traînée* et en une composante orthogonale à la vitesse, appelée *portance*. On s'intéresse désormais à la force de traînée, qui joue un rôle plus important. Dans cette catégorie, on peut distinguer essentiellement deux types de forces. a) Une *force de frottement*, appelée *force de viscosité* ; c'est une fonction linéaire homogène de la vitesse, mais de sens opposé à celle-ci. b) Une *force inertielle*, due au fait que le corps, pour se mouvoir, doit déplacer un volume équivalent de fluide ; c'est une fonction quadratique homogène de la vitesse, dirigée en sens opposé à celle-ci et agissant frontalement contre le corps en mouvement.

2. Viscosité du milieu fluide

La force de viscosité dépend d'un paramètre caractéristique du fluide appelé *coefficient de viscosité*.

Le coefficient de viscosité *dynamique*, μ ou η, appelé aussi *viscosité dynamique*, est homogène à une pression multipliée par une longueur et divisée par une vitesse :

$$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}.$$

Unité : kg m^{-1} s^{-1} = Pa s.

La *viscosité cinématique*, ν, est obtenue à partir de μ en le divisant par la masse volumique ρ du fluide :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

$$[\nu] = L^2T^{-1}.$$

Unité : m^2 s^{-1}.

3. La force de freinage

On assimile le corps à uns sphère de rayon a. En tenant compte de la dimension du coefficient de viscosité μ, la force de viscosité prend la forme :

$$F_{f1} = -k_1\mu a v,$$

k_1 étant un coefficient sans dimension positif.

L'existence de plusieurs grandeurs dimensionnées nous permet de construire d'autres expressions de forces. La force inertielle, qui ne dépend pas de la viscosité, prend la forme :

$$F_{f2} = -k_2\rho a^2|v|v,$$

k_2 étant un coefficient sans dimension positif.

En comparant les deux forces précédentes, on conclut que la force de viscosité sera dominante pour des vitesses faibles, tandis que la force inertielle sera dominante pour des vitesses grandes.

La possibilité de construire plusieurs expressions de forces de freinage est due à l'existence d'un paramètre sans dimension, appelé *nombre de Reynolds*. Il est défini comme suit :

$$\mathcal{R} = \frac{2a|v|}{\nu} = \frac{2a|v|}{\mu/\rho}, \qquad [\mathcal{R}] = [1].$$

On peut ainsi construire une expression générale de la force de freinage par la formule

$$F_f = -\mu a v f(\mathcal{R}),$$

où $f(\mathcal{R})$ est une fonction arbitraire de $\mathcal{R}$ (tendant vers une constante positive lorsque $\mathcal{R} \to 0$). La deuxième force de freinage (force inertielle) correspond à une fonction linéaire homogène en $\mathcal{R}$:

$$F_{f2} = bF_{f1}\mathcal{R},$$

où b est une constante positive. Dans les fluides avec faibles inhomogénéités, les deux forces de freinage précédentes sont suffisantes pour décrire l'ensemble des situations. On appelle *régime de Stokes* la situation dans laquelle la force de viscosité est dominante et *régime de Newton* la situation où la force inertielle domine.

On peut donner une signification plus physique au nombre de Reynolds, en remarquant, d'après la relation précédente, et en faisant abstraction des constantes multiplicatives sans dimension, qu'il s'écrit sous la forme

$$\mathcal{R} \sim \frac{F_{f2}}{F_{f1}}.$$

Le nombre de Reynolds mesure ainsi le rapport de la force de freinage du régime de Newton à celle du régime de Stokes. On calcule généralement le nombre de Reynolds avec une vitesse limite ou une vitesse caractéristique v_ℓ. La force de viscosité est dominante dans les régimes avec petits nombres de Reynolds ($\mathcal{R} < 1$) (régimes de Stokes), tandis que la force inertielle est dominante dans les régimes avec grand nombre de Reynolds ($\mathcal{R} > 10^3$) (régimes de Newton).

4. Vitesses faibles ou petits nombres de Reynolds

$$F_f = -k_1\mu a v.$$

On étudie le problème d'une bille jetée dans de la glycérine. Axe des x en verticale dirigé vers le bas.

ρ_b : masse volumique de la bille ; a : rayon de la bille ; $V_b = 4\pi a^3/3$: volume de la bille ; $m_b = \rho_b V_b$, sa masse ; v : sa vitesse ; ρ_f : masse volumique du fluide ; μ : sa viscosité ; g : accélération de la pesanteur. Le coefficient k_1 a été calculé par Stokes : $k_1 = 6\pi$. Équation du mouvement :

$$\rho_b V_b \frac{dv}{dt} = -6\pi\mu a v + (\rho_b - \rho_f)V_b g.$$

[On a tenu compte de la force d'Archimède.]

$$\rho_b \frac{dv}{dt} = -\frac{9}{2}\frac{\mu}{a^2}v + (\rho_b - \rho_f)g.$$

Équation différentielle du 1$^{\text{er}}$ordre linéaire avec second membre constant. La solution particulière est cherchée sous la forme d'une constante ; elle définit la vitesse limite v_ℓ et correspond à la situation où la force extérieure (pesanteur et Archimède) est équilibrée par la force de freinage :

$$v = v_\ell = \frac{2(\rho_b - \rho_f)ga^2}{9\mu}.$$

Équation sans second membre :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tau}v, \qquad \tau = \frac{2a^2\rho_b}{9\mu}, \qquad [\tau] = T.$$

Solution générale de cette équation :

$$v = Ce^{-t/\tau},$$

C étant une constante arbitraire.

Solution générale de l'équation avec second membre :

$$v(t) = Ce^{-t/\tau} + v_\ell.$$

Condition initiale : $v(0) = v_0$. $\Longrightarrow$:

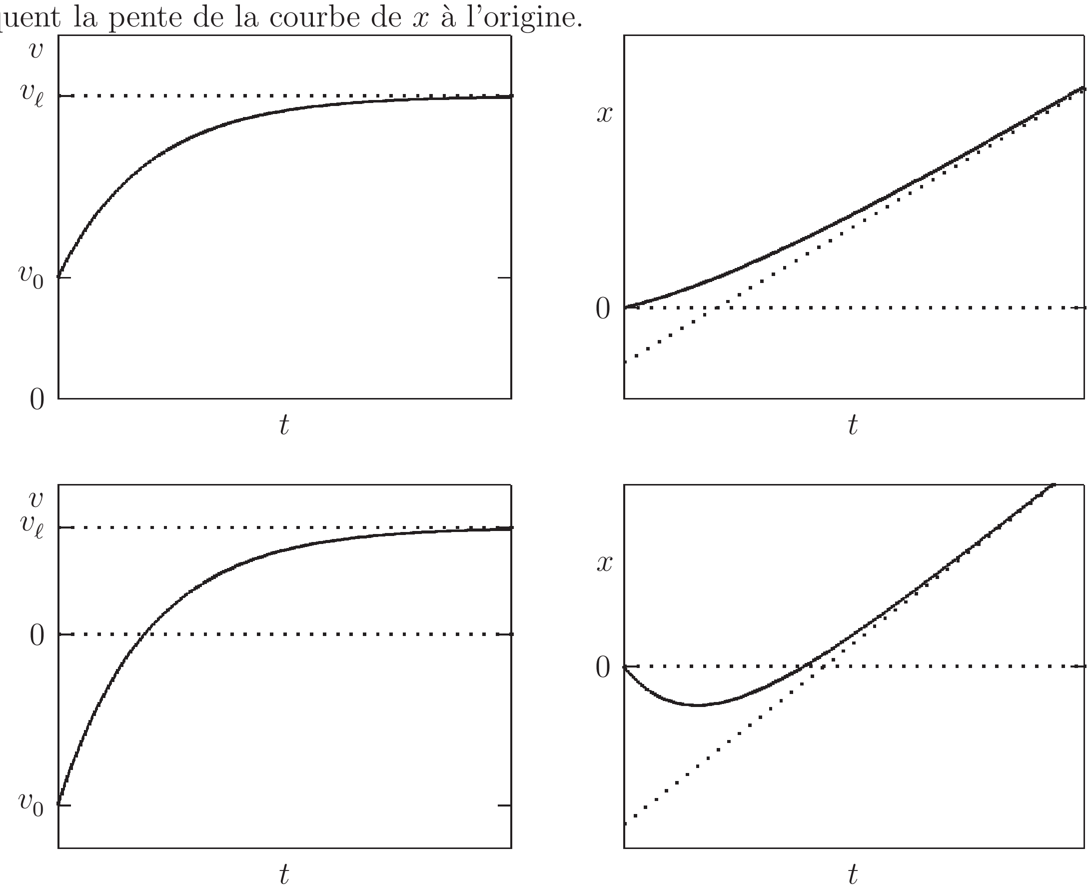
$$v(t) = (v_0 - v_\ell)e^{-t/\tau} + v_\ell.$$

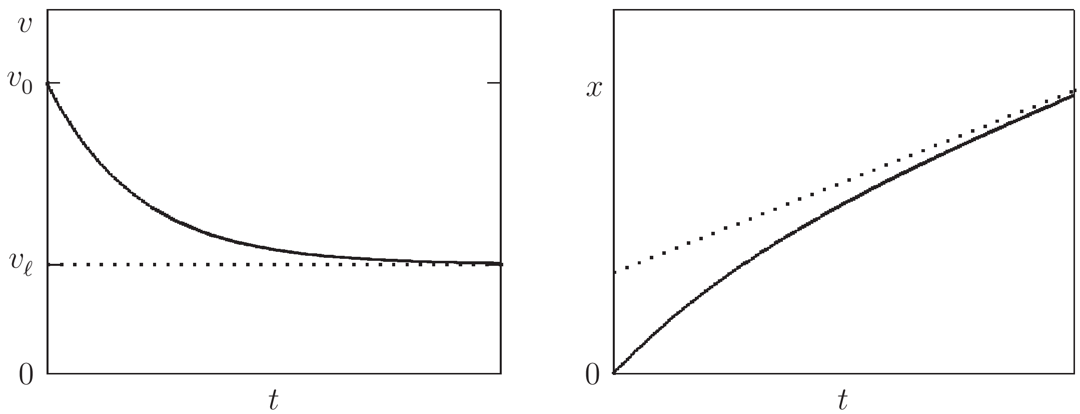
$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tau}(v_0 - v_\ell)e^{-t/\tau}$ a un signe bien défini tout le temps.

L'expression de $x(t)$ s'obtient en intégrant celle de v entre $t' = 0$ et $t' = t$, avec la condition initiale $x(0) = x_0$; la primitive de v est x :

$$x(t) = x_0 + v_\ell t + \tau(v_0 - v_\ell)(1 - e^{-t/\tau}).$$

On a tracé sur les figures les courbes de v et de x pour diverses valeurs de v_0 relativement à v_ℓ et pour $x_0 = 0$. A noter que v_0 représente la dérivée à l'origine de x et par conséquent la pente de la courbe de x à l'origine.





Application numérique. $v_0 = 0$; $g = 9,8$ m s^{-2} ; $a = 0,5$ mm ; $\rho_b = 2600$ kg m^{-3} (verre) ; $\rho_f = 1260$ kg m^{-3} ; on mesure $v_\ell = 0,9$ mm s^{-1}. On obtient : $\mu = 810 \times 10^{-3}$ kg m^{-1} s^{-1} ; $\nu = \frac{\mu}{\rho_f} = 640 \times 10^{-6}$ m^2 s^{-1} ; $\tau = 1,8 \times 10^{-4}$ s ; $\mathcal{R} = 2av_\ell/\nu = 1,4 \times 10^{-3} \ll 1$. Ce dernier résultat justifie l'hypothèse faite sur l'expression de la force de freinage.

5. Vitesses grandes ou grands nombres de Reynolds

$$F_f = -k_2 \rho a^2 |v| v.$$

(ρ : masse volumique du fluide.) On reprend le problème précédent, mais dans un fluide de faible viscosité (l'air par exemple) ; on pose $b = k_2 \rho a^2$. Équation du mouvement :

$$m\frac{dv}{dt} = -b|v|v + mg.$$

(On a négligé la force d'Archimède.) C'est une équation différentielle *non-lináire* en v avec second membre constant. En général pas de méthode générale pour la résolution des équations différentielles non-linéaires, mais dans le cas présent, à cause de la simplicité particulière du terme non-linéaire, une résolution complète est possible. On note l'existence d'une vitesse limite constante v_ℓ :

$$v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{b}}.$$

L'équation complète peut aussi être intégrée. Le comportement de v au cours du temps est qualitativement le même que dans le cas précédent. La vitesse tend rapidement vers sa valeur limite.

On considère le problème de la chute de la bille de la section précédente dans l'air. La masse volumique de l'air est $\rho_{air} = 1,29$ kg m^{-3}. La valeur de k_2 pour la sphère s'obtient à partir de courbes empiriques : $k_2 \simeq 0,7$. On trouve, avec les mêmes données pour la bille que dans la section précédente, $v_\ell = 7,7$ m s^{-1}.

La viscosité de l'air est $\mu_{air} = 0,018 \times 10^{-3}$ kg m^{-1} s^{-1}. On trouve pour le nombre de Reynolds $\mathcal{R} = 2a\rho_{air}v_\ell/\mu_{air} = 550$, ce qui justifie l'utilisation de la force de freinage de Newton.

VII- Oscillateur harmonique

1. Équations différentielles du deuxième ordre

La plupart des équations de la mécanique sont des équations différentielles du deuxième ordre, faisant intervenir la dérivée seconde par rapport au temps de la variable dynamique considérée (généralement la position). L'équation du mouvement d'une particule (équation de Newton) fait intervenir l'accélération qui est la dérivée seconde de la position par rapport au temps. Par exemple, pour une particule de masse m placée en présence d'une force extérieure $F(x)$ (mouvement unidimensionnel) on a l'équation

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x),$$

qui représente une équation différentielle du deuxième ordre.

Parmi les forces dépendant de x, ayant une généralité suffisante, la force de l'oscillateur harmonique est la plus représentative. Beaucoup de systèmes physiques, possédant des positions d'équilibre stable, lorsqu'ils sont légèrement écartés de leur position d'équilibre, ont des mouvements oscillatoires gouvernés par l'équation de l'oscillateur harmonique (approximation des petits mouvements). Le système physique qui produit directement l'équation de l'oscillateur harmonique est celui du ressort linéaire.

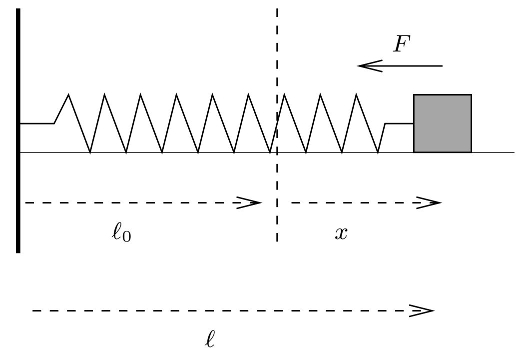
2. Force de rappel du ressort

Un ressort est un objet filiforme enroulé en forme de spirale cylindrique (généralement métallique) et possédant une élasticité et une tension interne. Soit ℓ_0 la *longueur au repos* ou *longueur à vide* du ressort. Lorsque la longueur du ressort est écartée de sa valeur de repos, soit en élongation soit en compression, prenant la valeur ℓ, le ressort exerce sur ses extrémités des forces de rappel proportionnelles à l'écart de sa longueur à partir de sa longueur de repos, $|\ell - \ell_0|$. Cest la loi de Hooke.

Ressort fixé à l'une de ses extrémités et placé sur un plan horizontal. Sur l'extrémité libre est attachée une masse ponctuelle m ; on néglige la masse du ressort. Si la longueur du ressort à l'instant t est ℓ, avec $\ell > \ell_0$ (élongation), la force de rappel F est dirigée dans le sens négatif, vers la position de repos ℓ_0. On a :

$$F = -k(\ell - \ell_0),$$

k étant une constante, appelée *constante de rappel* ou *constante de raideur* du ressort. On peut vérifier que la formule précédente reste aussi valable lorsque $\ell < \ell_0$ (compreesion) ; dans ce cas la force de rappel est dirigée dans le sens positif.



3. Équation de l'oscillateur harmonique

L'équation du mouvement de la masse m, soumise à la force de rappel du ressort, est :

$$m\frac{d^2\ell}{dt^2} = -k(\ell - \ell_0).$$

En effectuant le changement de variable

$$x = \ell - \ell_0,$$

où x représente l'écart algébrique du ressort à partir de sa longueur de repos, on obtient :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Analyse dimensionnelle. $[kx]$=force=MLT^{-2}, $[k] = MT^{-2}$, $[k/m] = T^{-2}$. $\sqrt{m/k}$ définit le temps caractéristique de l'évolution du système. On pose :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0.$$

ω_0 a la dimension de T^{-1} et jouera le rôle d'une *pulsation*, dont l'unité est le radian/seconde (rd s^{-1}). L'équation devient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x.$$

C'est l'équation de l'oscillateur harmonique.

Remarque générale. Toute équation différentielle du deuxième ordre est équivalente à un système de deux équations différentielles couplées du premier ordre avec deux degrés de liberté. On peut vérifier que le système d'équations différentielles suivantes pour les variables x et y

$$\dot{x} = \omega_0 y, \qquad \dot{y} = -\omega_0 x,$$

reproduit l'équation de l'oscillateur harmonique après avoir éliminé la variable y.

4. Solutions de l'équation de l'oscillateur harmonique

Deux solutions indépendantes, sous la forme de cosinus et de sinus.

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t),$$

A et B étant des constantes. *L'équation de l'oscillateur harmonique étant une équation différentielle du deuxième ordre, la solution générale dépend de deux constantes arbitraires, qui peuvent être déterminées par les conditions initiales sur la position et la vitesse.*

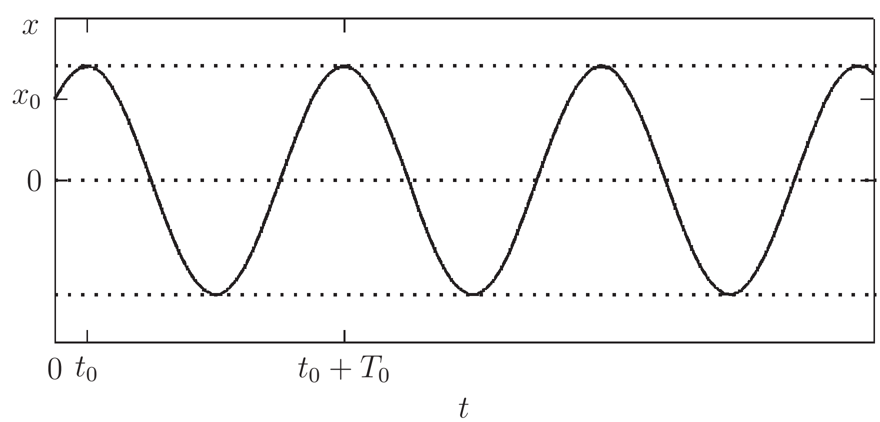
D'autres formes équivalentes de solutions :

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad x(t) = D\sin(\omega_0 t + \psi),$$

C et φ d'une part, D et ψ de l'autre sont des constantes. On passe de ces solutions à la première en développant le cosinus et le sinus. On a par exemple les identifications

$$A = C\cos\varphi, \qquad B = -C\sin\varphi, \qquad C = \sqrt{A^2 + B^2}, \qquad \tan\varphi = -\frac{B}{A}.$$

Les solutions représentent un mouvement oscillatoire périodique suivant la période des fonctions cosinus et sinus, d'où le nom d'oscillateur harmonique. C est appelée *amplitude* des oscillations, ω_0 la *pulsation*, φ *constante de phase* ou *phase à l'origine*. La *période* est $T_0 = 2\pi/\omega_0$; la *fréquence* est $\nu_0 = 1/T_0 = \omega_0/(2\pi)$.



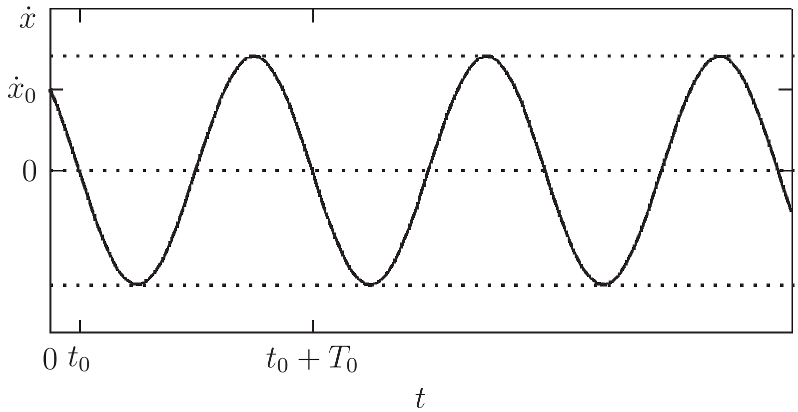
Conditions initiales : $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \frac{dx}{dt}|_{t=0} = \dot{x}_0$. On trouve

$$x(0) = A = x_0,$$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t),$$

$$\dot{x}(0) = \omega_0 B = \dot{x}_0.$$

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t).$$



$$C = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}, \qquad \varphi = -\arctan(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}).$$

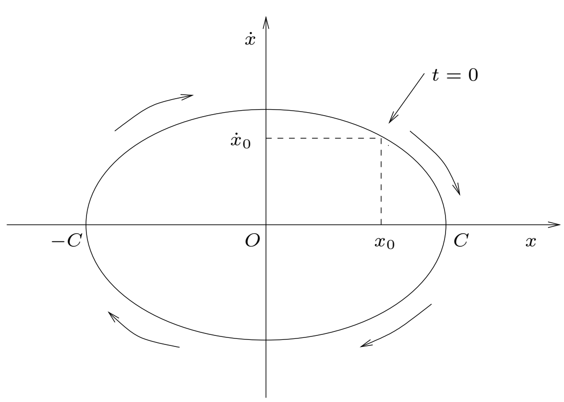
5. Propriétés des solutions

Solutions oscillatoires périodiques. Lorsque $|x|$ atteint sa valeur maximale C, on a $\dot{x} = 0$; inversement, lorsque $|\dot{x}|$ atteint sa valeur maximale $\omega_0 C$, on a $x = 0$. Sur les figures on a pris $x_0 > 0$, $\dot{x}_0 > 0$.

x et $\dot{x}$ vérifient l'équation

$$(x(t))^2 + \frac{(\dot{x}(t))^2}{\omega_0^2} = C^2 = \text{const.}$$

C'est l'équation d'une ellipse dans le plan $(x, \dot{x})$. Le point représentatif $(x(t), \dot{x}(t))$ décrit cette ellipse au cours du temps. Le sens de rotation est le sens trigonométrique négatif (sens des aiguilles d'une montre). Cette propriété se comprend aussi sans calcul détaillé ; lorsque x atteint sa valeur maximale C, le ressort a son élongation maximale dans le sens positif ; aux instants suivants il ne peut que se contracter avec une vitesse négative. La représentation du mouvement de la masse m dans le plan $(x, \dot{x})$ s'appelle *portrait de phase*.



6. Circuit bobine-condensateur

$$L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}=0, \qquad i=\frac{dq}{dt}, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{di}{dt}=\frac{d^2q}{dt^2},$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C}=0, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{LC}=0.$$

On pose : $\omega_0^2=1/(LC)$; l'équation devient :

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\omega_0^2 q=0.$$

Elle est du même type que celle de l'oscillateur harmonique. Solutions vérifiant les conditions initiales $q(0)=q_0$ et $i(0)=i_0$:

$$q(t)=q_0\cos(\omega_0 t)+\frac{i_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t),$$

$$i(t)=-\omega_0 q_0\sin(\omega_0 t)+i_0\cos(\omega_0 t).$$

On a un courant périodique harmonique.

7. Oscillateur harmonique avec force extérieure constante

Ressort avec masse m à son extrémité, suspendu verticalement. La masse m subit la force supplémentaire de la pesanteur. ℓ_0 : longueur du ressort au repos (longueur à vide) ; $\ell(t)$: longueur du ressort à l'instant t :

$$m\frac{d^2\ell}{dt^2}=-k(\ell-\ell_0)+mg.$$

La force de la pesanteur, étant constante, déplace tout simplement la position d'équilibre du ressort. Nouvelle position d'équilibre : $\ell=\ell_1$=const. ; correspond à une vitesse et à une accélération nulles :

$$0=-k(\ell_1-\ell_0)+mg,$$

$$\ell_1=\ell_0+\frac{mg}{k}.$$

Faire le changement de variable

$$\ell=\ell_1+x, \qquad \frac{d^2\ell}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-k(\ell_1-\ell_0-\frac{mg}{k}).$$

Le dernier terme est nul, d'après la définition de ℓ_1. On retrouve

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2}=-\omega_0^2 x, \quad \omega_0^2=\frac{k}{m}.$$

Même équation que précédemment ; x représente maintenant le déplacement à partir de la nouvelle position d'équilibre, en présence de la pesanteur. Les oscillations ont lieu autour de la nouvelle position d'équilibre.

Situation similaire avec un circuit bobine-condensateur en présence d'un générateur avec force électromotrice constante E.

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = E, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = \frac{E}{L}.$$

On fait le changement de variable $q = q_1 + Q$, avec q_1 la nouvelle valeur d'équilibre de q : $q_1 = EC$. L'équation de Q devient :

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\omega_0^2 Q, \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

$$Q(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t),$$

$$q(t) = EC + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t).$$

Les oscillations de q ont lieu autour de la nouvelle valeur d'équilibre EC.

8. Représentation complexe

Souvent, la représentation complexe peut être plus utile ou efficace pour la résolution des équations différentielles. On résoud maintenant l'équation de l'oscillateur harmonique en représentation complexe.

On suppose que x peut être complexe, représenté par $\widetilde{x}$, avec $x = \mathcal{R}e(\widetilde{x})$.

$$\frac{d^2\widetilde{x}}{dt^2} + \omega_0^2\widetilde{x} = 0.$$

On cherche les solutions sous la forme de fonctions exponentielles complexes en général :

$$\widetilde{x}(t) = \widetilde{A}e^{i\omega t},$$

avec $\widetilde{A}$ une constante complexe et ω une constante (qui peut être complexe) à déterminer. On a :

$$\frac{d\widetilde{x}}{dt} = i\omega\widetilde{A}e^{i\omega t} = i\omega\widetilde{x},$$

$$\frac{d^2\widetilde{x}}{dt^2} = (i\omega)^2\widetilde{A}e^{i\omega t} = -\omega^2\widetilde{x}.$$

On remplace dans l'équation :

$$-(\omega^2 - \omega_0^2)\widetilde{x} = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad \omega^2 = \omega_0^2, \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \pm\omega_0.$$

On a ainsi deux solutions indépendantes définies par les deux valeurs possibles de ω. La solution générale est la superposition de ces deux solutions (propriété de linéarité de l'équation) :

$$\widetilde{x}(t) = \widetilde{A}e^{i\omega_0 t} + \widetilde{B}e^{-i\omega_0 t}.$$

Retour à la partie réelle. On décompose les coefficients $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ en parties réelle et imaginaire : $\widetilde{A} = a + ic$, $\widetilde{B} = b + id$, a, b, c, d étant réels. On a aussi la décomposition

$$e^{\pm i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) \pm i \sin(\omega_0 t).$$

On trouve :

$$x = \mathcal{R}e(\widetilde{x}) = (a + b)\cos(\omega_0 t) + (-c + d)\sin(\omega_0 t).$$

En définissant $A = a + b$, $B = -c + d$, on obtient :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t),$$

qui est la solution générale déjà obtenue par la méthode de la représentation réelle. L'intérêt des fonctions exponentielles est que sous les opérations de dérivation et d'intégration elles restent des fonctions exponentielles. Cette méthode sera surtout utile lors de l'étude du mouvement avec amortissement et du mouvement forcé.

VIII- Mouvement oscillatoire amorti

1. Amortissement

Amortissement du mouvement à cause de frottements ou de la résistance du milieu (air, liquide, etc.) dans lequel ont lieu les oscillations. Problème similaire à ce qui a été vu sur le mouvement avec freinage. On considère le cas où la force de freinage est linéaire par rapport au module de la vitesse :

$$F_f = -fv = -f\dot{x}, \qquad f > 0.$$

2. Équation du mouvement de l'oscillateur amorti

$$m\ddot{x} = -f\dot{x} - kx, \qquad \Longrightarrow \qquad \ddot{x} + \frac{f}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Dimensions : $[\frac{k}{m}] = T^{-2}$, $[\frac{f}{m}] = T^{-1}$. On pose :

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \omega_0 > 0; \qquad \frac{f}{m} = 2\lambda\omega_0, \quad \lambda > 0.$$

λ est sans dimension.

Résolution par la représentation complexe. x est remplacé par une fonction complexe $\widetilde{x}$:

$$\ddot{\widetilde{x}} + 2\lambda\,\omega_0\,\dot{\widetilde{x}} + \omega_0^2\,\widetilde{x} = 0.$$

On cherche les solutions sous la forme de fonctions exponentielles complexes :

$$\widetilde{x} = \widetilde{A}\,e^{-rt}, \qquad \dot{\widetilde{x}} = -r\widetilde{A}\,e^{-rt}, \qquad \ddot{\widetilde{x}} = r^2\widetilde{A}\,e^{-rt},$$

où $\widetilde{A}$ et r sont des constantes pouvant être complexes. On remplace dans l'équation ; $\widetilde{A}e^{-rt}$ se factorise et peut être enlevé. Il reste :

$$r^2 - 2\lambda\,\omega_0\,r + \omega_0^2 = 0.$$

Cette équation est appelée *équation caractéristique*. Discriminant : $\Delta' = \omega_0^2(\lambda^2 - 1)$. Trois cas sont à distinguer suivant les valeurs de λ, c'est-à-dire du coefficient de freinage f.

1) $0 < \lambda < 1$.

On a $\Delta' < 0$. On pose $\omega = \omega_0\sqrt{1-\lambda^2}$, $\sqrt{\Delta'} = i\omega$. On obtient deux solutions pour r :

$$r_\pm = \omega_0(\lambda \pm i\sqrt{1-\lambda^2}).$$

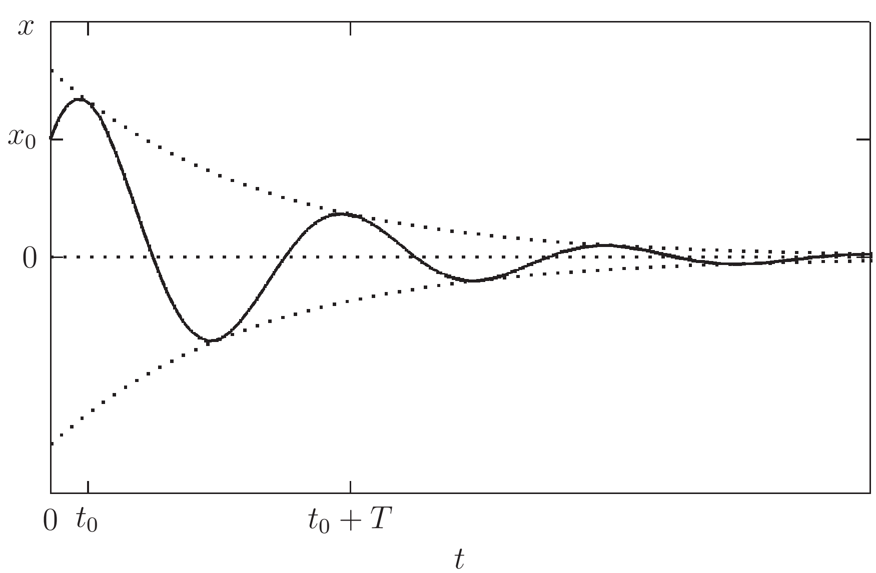
$$\widetilde{x} = \widetilde{A}_+ e^{-r_+t} + \widetilde{A}_- e^{-r_-t},$$

$$\widetilde{x} = \Big(\widetilde{A}_+ e^{-i\omega t} + \widetilde{A}_- e^{+i\omega t}\Big)e^{-\lambda\omega_0 t}.$$

En passant à la partie réelle, les exponentielles complexes redonnent des combinaisons de fonctions cosinus et sinus :

$$x(t) = \mathcal{R}e(\widetilde{x}) = \Big(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\Big)e^{-\lambda\omega_0 t} = Ce^{-\lambda\omega_0 t}\cos(\omega t + \varphi),$$

où A, B, C, φ sont des constantes réelles (on définit $C > 0$) qui sont fixées par les deux conditions initiales sur la position et la vitesse.



On a de nouveau une fonction oscillatoire, avec une pulsation $\omega = \omega_0\sqrt{1-\lambda^2}$, mais avec une amplitude décroissante dans le temps, $Ce^{-\lambda\omega_0 t}$. La fonction oscillatoire est enfermée entre les deux courbes-enveloppes $\pm Ce^{-\lambda\omega_0 t}$. La période des oscillations est

$T = 2\pi/\omega$. La rapidité de l'amortissement dépend de λ (amortissement rapide pour λ proche de 1).

La vitesse est :

$$\dot{x}(t) = \omega\Big(-A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\Big)e^{-\lambda\omega_0 t} - \lambda\omega_0\Big(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\Big)e^{-\lambda\omega_0 t}.$$

Conditions initiales : $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$; $\Longrightarrow A = x_0$ et $B = \frac{1}{\omega}(\dot{x}_0 + \lambda\omega_0 x_0)$.

$$x(t) = \Big(x_0\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega}(\dot{x}_0 + \lambda\omega_0 x_0)\sin(\omega t)\Big)e^{-\lambda\omega_0 t}.$$

La condition $0 < \lambda < 1$ définit le *régime sous-critique.*

2) $\lambda > 1$.

$\Delta' > 0$; deux solutions réelles de l'équation caractéristique :

$$r_\pm = \omega_0(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}) > 0.$$

$$\widetilde{x} = \widetilde{A}_+ e^{-r_+ t} + \widetilde{A}_- e^{-r_- t}.$$

Les exponentielles sont réelles. En passant à la partie réelle, on trouve :

$$x(t) = A_+ e^{-r_+ t} + A_- e^{-r_- t}.$$

Le mouvement est rapidement amorti, sans oscillations.

$$\dot{x}(t) = -r_+ A_+ e^{-r_+ t} - r_- A_- e^{-r_- t}.$$

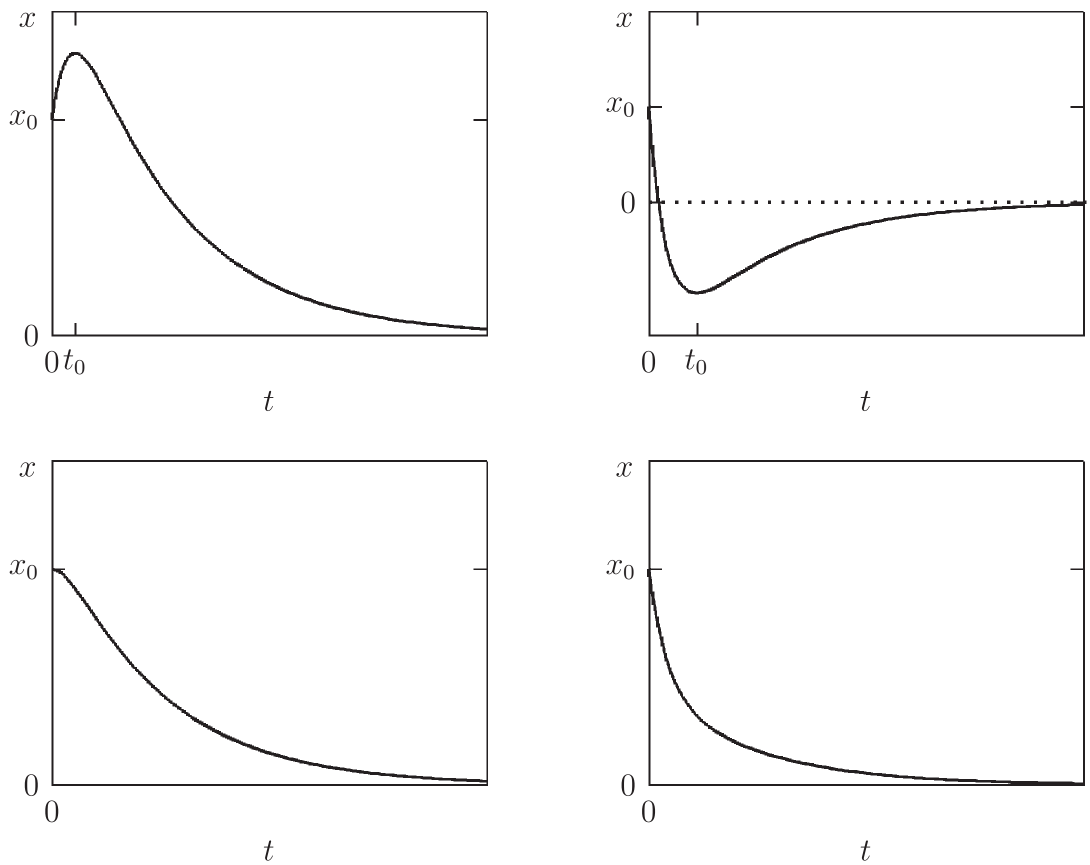
Conditions initiales : $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

$$x(t) = -\left(\frac{r_- x_0 + \dot{x}_0}{r_+ - r_-}\right)e^{-r_+ t} + \left(\frac{r_+ x_0 + \dot{x}_0}{r_+ - r_-}\right)e^{-r_- t}.$$

La fonction $x(t)$ peut posséder un extrêmum local pour $t = t_0 > 0$. Pour cela, on doit avoir $\dot{x}(t_0) = 0$; on trouve :

$$t_0 = \frac{1}{(r_+ - r_-)}\ln\left(-\frac{r_+ A_+}{r_- A_-}\right) = \frac{1}{(r_+ - r_-)}\ln\left(\frac{r_+}{r_-}\Big(\frac{r_- x_0 + \dot{x}_0}{r_+ x_0 + \dot{x}_0}\Big)\right).$$

Pour que t_0 (≥ 0) existe, l'argument du logarithme doit être positif et supérieur à 1, ce qui impose des conditions sur les conditions initiales. Par exemple, les conditions initiales suivantes conduisent à l'existence de t_0 : $x_0 \geq 0$ et $\dot{x}_0 > 0$; $x_0 > 0$ et $\dot{x}_0 < -r_+ x_0$. Pour $\dot{x}_0 = 0$, on a $t_0 = 0$. Pour $x_0 > 0$ et $-r_+ x_0 < \dot{x}_0 < -r_- x_0$, t_0 n'existe pas ; etc. On a représenté sur les figures suivantes la courbe de $x(t)$ pour les quatre cas précédents.



La condition $\lambda > 1$ définit le *régime sur-critique*. Il correspond à une force de freinage élevée par rapport à la force de rappel de l'oscillateur.

3) $\lambda = 1$.

L'équation caractéristique a une racine double : $r = \omega_0$, donc conduisnat à une seule fonction exponentielle. On vérifie facilement qu'une deuxième solution indépendante est donnée dans ce cas par la fonction $\widetilde{x} = \widetilde{B}te^{-\omega_0 t}$. En prenant la somme des deux solutions indépendantes et en passant à la partie réelle, on obtient, après utilisation des conditions initiales :

$$x(t) = \Big(x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_0 x_0)t\Big)e^{-\omega_0 t}.$$

Le comportement de cette solution ressemble à celui du cas précédent.

La condition $\lambda = 1$ définit le *régime critique*.

3. Circuit bobine-résistance-condensateur

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0, \qquad i = \frac{dq}{dt}.$$

En éliminant i on obtient :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0.$$

On pose : $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $2\lambda\omega_0 = \frac{R}{L}$.

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda\omega_0\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0.$$

C'est une équation du même type que celle étudiée plus haut. On voit que l'amortissement du courant dans le circuit est dû à la présence de la résistance.

IX- Oscillations forcées

Le système de l'oscillateur peut aussi subir l'influence d'une force extérieure dépendante du temps (mais indépendante de x). Par exemple, l'extrémité fixe du ressort peut être attachée à un autre système qui a un mouvement bien défini ; ou le générateur d'un circuit électrique peut établir une tension extérieure oscillante, etc.

On désigne par $g(t)$ la force extérieure dépendante du temps ; l'équation du mouvement de l'oscillateur devient :

$$m\ddot{x} = -f\dot{x} - kx + g(t), \qquad \text{ou} \qquad \ddot{x} + 2\lambda\,\omega_0\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{g(t)}{m},$$

où on a posé $\omega_0^2 = k/m$ et $2\lambda\omega_0 = f/m$.

On a une équation différentielle du deuxième ordre avec second membre. On suppose que $g(t)$ est une fonction de type simple (exponentielle, fonction sinusoïdale, etc.). Dans ce cas, on peut chercher une solution particulière de l'équation avec second membre. La solution générale de l'équation avec second membre est alors égale à la somme de la solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre. Cette dernière a déjà été étudiée dans le chapitre précédent. On s'intéresse maintenant à la solution particulière de l'équation avec second membre.

On suppose que la force $g(t)$ est une fonction oscillatoire :

$$g(t) = a\cos(\Omega t),$$

où a est une constante réelle positive et Ω (> 0) est la pulsation des oscillations. On utilise la méthode de la représentation complexe. $\cos(\Omega t)$ est la partie réelle de $e^{i\Omega t}$. L'équation complexe à résoudre est :

$$\ddot{\widetilde{x}} + 2\lambda\,\omega_0\,\dot{\widetilde{x}} + \omega_0^2\,\widetilde{x} = \frac{a}{m}\,e^{i\Omega t}.$$

On cherche la solution particulière sous la forme d'une fonction exponentielle complexe avec la même pulsation que Ω :

$$\widetilde{x}_1 = \widetilde{b}\,e^{i\Omega t},$$

où $\widetilde{b}$ est une constante complexe. On remplace cette expression dans l'équation ; on trouve :

$$-\Omega^2\widetilde{b}\,e^{i\Omega t} + 2i\lambda\omega_0\Omega\,\widetilde{b}e^{i\Omega t} + \omega_0^2\widetilde{b}\,e^{i\Omega t} = \frac{a}{m}\,e^{i\Omega t}.$$

Les exponentielles peuvent être enlevées. On obtient :

$$\widetilde{b} = \frac{a}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\lambda\omega_0\Omega)}.$$

Un nombre complexe $z = x + iy$ peut être réécrit sous la forme du produit d'un module et de l'exponentielle complexe d'une phase : $z = |z|e^{i\varphi}$, avec $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\varphi = \arctan(y/x)$. On a aussi : $1/z = e^{-i\varphi}/|z|$. On applique ces formules à $\widetilde{b}$:

$$\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\lambda\omega_0\Omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega_0^2\Omega^2}\; e^{i\phi}, \qquad \phi = \arctan\Big(\frac{2\lambda\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\Big),$$

$$\widetilde{b} = \frac{a}{m}\frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega_0^2\Omega^2}},$$

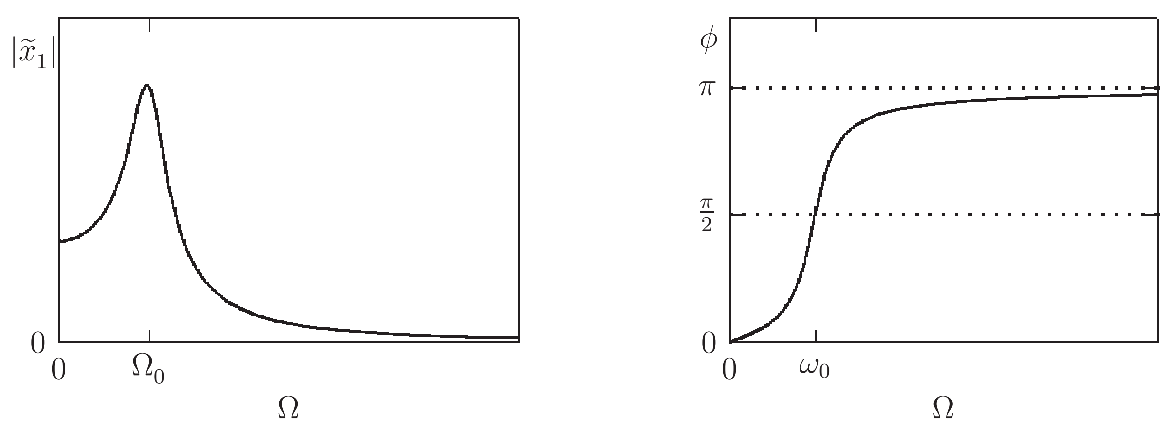
$$\widetilde{x}_1 = \frac{a}{m}\frac{e^{i(\Omega t - \phi)}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega_0^2\Omega^2}}.$$

En passant à la partie réelle, on trouve :

$$x_1(t) = \mathcal{R}e(\widetilde{x}_1) = \frac{a}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega_0^2\Omega^2}}\cos(\Omega t - \phi).$$

C'est une fonction oscillatoire avec la pulsation Ω. Par rapport à la force extérieure oscillatoire, elle a subi un *déphasage* égal à ϕ. Son amplitude dépend en particulier de Ω ; quand $\Omega \to 0$, elle tend vers $a/(m\omega_0^2)$; quand $\Omega \to \infty$, elle tend vers 0 ; lorsque $\lambda^2 < 0.5$ elle possède un maximum pour $\Omega = \Omega_0 = \omega_0\sqrt{1 - 2\lambda^2}$, correspondant au phénomène de *résonance* (amplification de l'amplitude) ; l'amplitude à la résonance est égale à $a/(2\lambda\omega_0^2 m\sqrt{1 - \lambda^2})$ et augmente lorsque λ diminue (amortissemnet faible) ; pour λ petit, on a $\Omega_0 \simeq \omega_0$.

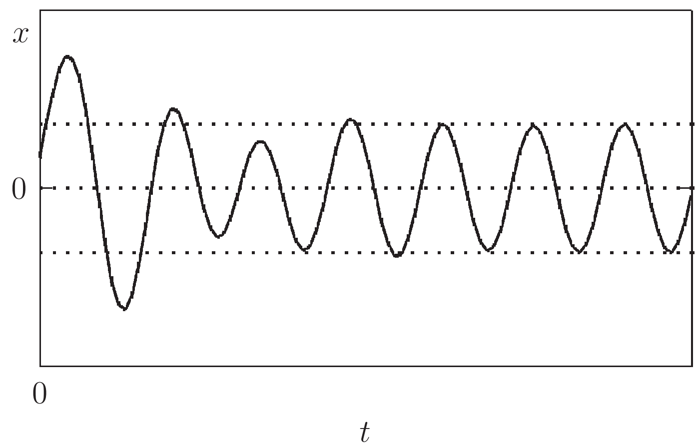
La phase ϕ tend vers 0 lorsque $\Omega \to 0$; elle tend vers $\pi/2$ lorsque $\Omega \to \omega_0$ et tend vers π lorsque $\Omega \to \infty$.



Solution générale de l'équation avec second membre en représentation complexe :

$$\widetilde{x} = \widetilde{x}_{ssm} + \widetilde{x}_1 = \widetilde{A}_+ e^{-r_+ t} + \widetilde{A}_- e^{-r_- t} + \widetilde{b} e^{i\Omega t},$$

où $\widetilde{x}_{ssm}$ est la solution de l'équation sans second membre, obtenue dans le chapitre précédent. Mais, pourvu que λ soit différent de 0 (présence d'une force de freinage), la solution de l'équation sans second membre, quelle que soit la valeur précise de λ, est une fonction amortie avec le temps. Au bout d'un certain temps elle devient négligeable et seule subsiste la solution particulière $\widetilde{x}_1$ correspondant au mouvement forcé qui instaure le *régime permanent*.



Une situation similaire apparaît aussi dans les circuits électriques soumis à une tension extérieure oscillante :

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E(t) = V_0 \cos(\omega t).$$

Après élimination de i $(= \frac{dq}{dt})$, on obtient :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{V_0}{L}\cos(\omega t).$$

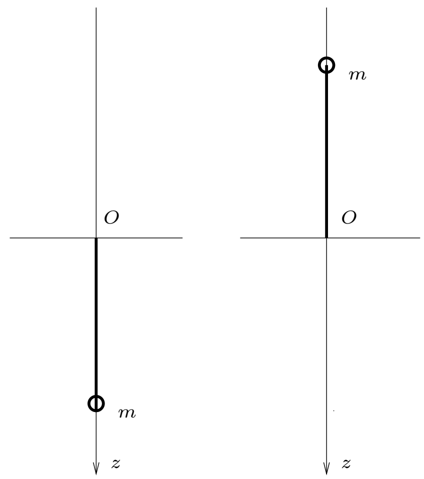
Cette équation est du même type que celle étudiée plus haut.

X- Équilibre et stabilité

1. Équilibre

Un système est en équilibre lorsque toutes les variables le décrivant restent constantes au cours du temps ; $\Longrightarrow$ vitesses nulles pour tout t $\Longrightarrow$ accélérations nulles $\Longrightarrow$ (par les équations du mouvement) sommes des forces extérieures nulles : $\sum \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0}$.

Exemple. Pendule simple. Équilibre pour les deux positions verticales $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. (θ : angle que fait la tige du pendule avec la verticale descendante.) La force de la



peseanteur est contrebalancée par la réaction de la tige. Ces deux positions d'équilibre ne jouent pas des rôles similaires.

Si on écarte le pendule légèrement de la position d'équilibre $\theta = 0$, il continue de rester au voisinage de cette position et a des mouvements oscillatoires de faible amplitude. On dit qu'on a une position d'équilibre *stable*.

Si on écarte le pendule légèrement de la position d'équilibre $\theta = \pi$, il s'éloigne immédiatement de cette position. Position d'équilibre *instable*.

Pour avoir stabilité il faut que les forces agissant sur le système au voisinage de la position d'équilibre soient attractives vers cette position. Instabilité lorsque les forces sont répulsives de cette position.

La notion d'équilibre peut aussi être considérée pour des systèmes non-mécaniques, dont les variables descriptives vérifient des équations différentielles ; exemples : nombre de molécules dans un échantillon de matière, populations, variables des circuits électriques, etc. On considèrera généralement les cas de systèmes avec une seule variable dynamique qu'on désignera par x. Celle-ci est supposée vérifier, suivant sa nature physique, une équation différentielle d'évolution du premier ou du second ordre :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x),$$

ou

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(x).$$

Le système est dans un état d'équilibre lorsque x reste constant au cours du temps :

$$x = x_1 = \text{const.},$$

ce qui entraîne

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2x_1(t)}{dt^2} = 0.$$

Les équations différentielles impliquent alors

$$f(x_1) = 0, \quad \text{ou} \quad F(x_1) = 0.$$

x_1 sera appelé position d'équilibre, même si sa signification physique n'est pas une position dans l'espace. La position d'équilibre est déterminée par la résolution de l'une ou l'autre des équations précédentes.

Exemples. a) Ressort de constante de rappel k, de longueur à vide ℓ_0, de longueur ℓ à l'instant t, fixé à une extrémité et suspendu verticalement avec une masse m attachée à l'autre extrémité. Axe positif vers le bas. Équation du mouvement :

$$m\frac{d^2\ell}{dt^2} = -k(\ell - \ell_0) + mg.$$

$$F(\ell) = -\frac{k}{m}(\ell - \ell_0) + g.$$

Position d'équilibre : $\ell_1 = \ell_0 + mg/k$.

b) Chute d'un objet sphérique de rayon a, de masse m, dans un fluide de masse volumique ρ, avec grande vitesse v. Équation du mouvement :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - k_2\rho a^2|v|v.$$

État d'équilibre pour v : $v_1 = \sqrt{mg/(k_2\rho a^2)}$.

2. Mouvement autour des positions d'équilibre

On écarte légèrement le système de sa position d'équilibre. Deux possibilités.

1) Le système continue de rester au cours de son mouvement au voisinage de la position d'équilibre. La position d'équilibre est *stable*.

2) Le système s'écarte de plus en plus de la position d'équilibre. La position d'équilibre est *instable*.

Critères de la stabilité. Au voisinage de la position d'équilibre $|x - x_1|$ est très petit devant la longueur caractéristique du problème. On effectue dans l'équation du mouvement un développement limité de $f(x)$ ou de $F(x)$ autour de x_1, en négligeant les termes d'ordre supérieur à $(x - x_1)$.

$$f(x) \simeq f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1).$$

Or $f(x_1) = 0$, car x_1 est une position d'équilibre. L'équation du mouvement devient :

$$\frac{dx}{dt} = f'(x_1)(x - x_1).$$

On pose $z = x - x_1$; $\Longrightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dz}{dt} = \lambda z,$$

où on a posé $\lambda = f'(x_1)$. Solution :

$$z(t) = z_0 e^{\lambda t}.$$

Si $\lambda < 0$, $|z(t)| \to 0$ lorsque $t \to \infty$, et $x \to x_1$; stabilité de la position d'équilibre. Si $\lambda > 0$, $|z(t)| \to \infty$ lorsque $t \to \infty$, et x s'éloigne de x_1 ; instabilité de la position d'équilibre. Le critère de la stabilité est donc :

$$f'(x_1) < 0.$$

Dans l'exemple du mouvement avec force de freinage, on a $f'(v_1) = -2k_2 \rho a^2 v_1/m < 0$; vitesse limite stable.

Pour l'équation du deuxième ordre on a :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x) \simeq F(x_1) + (x - x_1)F'(x_1) = F'(x_1)(x - x_1).$$

On pose $z = (x - x_1)$:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = F'(x_1)z.$$

Si $F'(x_1) < 0$, on pose $F'(x_1) = -\omega^2$:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z.$$

Équation de l'oscillateur harmonique. Solution :

$$z(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

$|z|$ reste borné au cours du temps avec mouvement oscillatoire autour de la position d'équilibre. Position d'équilibre stable.

Si $F'(x_1) > 0$, on pose $F'(x_1) = \gamma^2$:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \gamma^2 z.$$

Solution :

$$z(t) = ae^{\gamma t} + be^{-\gamma t} = A\cosh(\gamma t + \alpha).$$

$|z(t)| \to \infty$ lorsque $t \to \infty$ et x s'éloigne de x_1. Position d'équilibre instable.

Le critère de la stabilité est donc :

$$F'(x_1) < 0.$$

Dans l'exemple du ressort suspendu avec masse, on vérifie que $F'(\ell_1) = -k/m < 0$; stabilité des oscillations.

XI- Dynamique des populations

1. Modèles de Malthus et de Verhulst

Difficulté de modéliser la dynamique et l'évolution des populations par une équation simple. Beaucoup de facteurs extérieurs.

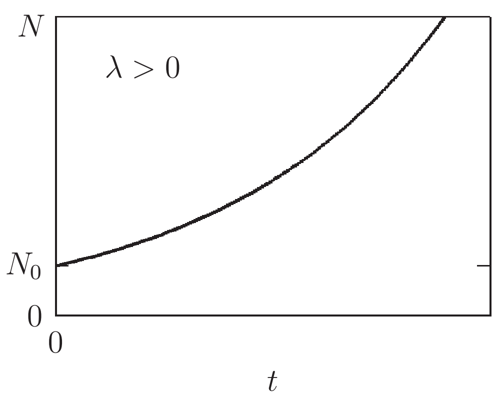
Modèle le plus simple dû à Malthus (fin dix-huitième siècle). On suppose que tous les facteurs dynamiques sont représentés par deux paramètres constants, les taux de naissance, λ_n, et de mortalité, λ_m. (Taux : variation relative par unité de temps.) Ces deux paramètres se recombinent en un seul paramètre, le taux de croissance λ (quantité algébrique) : $\lambda = \lambda_n - \lambda_m$. Si $N(t)$ est le nombre de la population (N étant généralement très grand peut être considérée comme une fonction continue), l'équation d'évolution est :

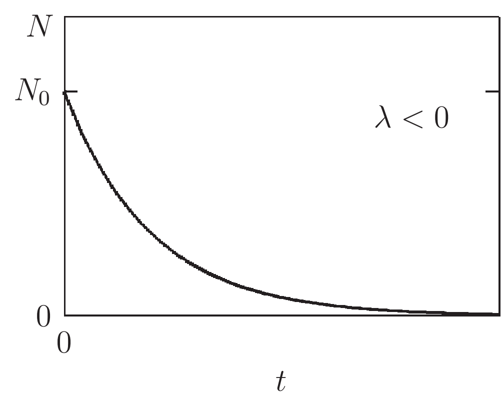
$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t).$$

Équation similaire à celle de la radioactivité. État d'équilibre donné par l'équation $f(N_1) = \lambda N_1 = 0$; donc $N_1 = 0$. $f'(N_1) = \lambda$; si $\lambda > 0$ (cas le plus fréquent), état d'équilibre instable ; si $\lambda < 0$, état d'équilibre stable. Ces conclusions se vérifient directement sur la solution exacte :

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t}.$$

Le cas $\lambda > 0$ correspond à une croissance continuelle vers l'infini ; le cas $\lambda < 0$ correspond à l'extinction de la population. (Voir Figures.)





Le cas $\lambda > 0$ conduit cependant sur une longue période à des écarts importants à partir de la situation réelle. Après une période de forte croissance, cette dernière commence à se ralentir ; d'où l'idée d'introduire une force de freinage dans l'équation d'évolution. Analogie avec la force de freinage en v^2 des mouvements amortis (régime de Newton) qui se manifeste pour les grandes vitesses. Le modèle de Verhulst (première moitié du dix-neuvième siècle) introduit un terme de freinage de la croissance en $-N^2$ (un terme linéaire en N ne servirait qu'à modifier la valeur de λ) :

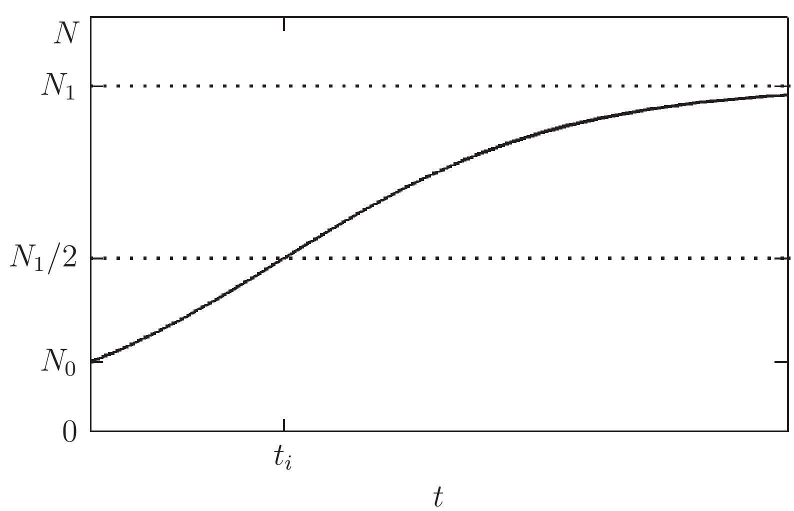
$$\frac{dN}{dt} = \lambda N - kN^2, \qquad \lambda > 0, \quad k > 0.$$

Cette équation s'appelle aussi *équation logistique.* k doit être suffisamment petit pour que l'effet du terme correspondant ne se manifeste qu'aux grandes valeurs de N (c'est-à-dire après une forte croissance). Un nouvel état d'équilibre existe ; l'équation $f(N_1) = \lambda N_1 - kN_1^2 = N_1(\lambda - kN_1) = 0$ a une nouvelle solution, autre que zéro :

$$N_1 = \frac{\lambda}{k}.$$

D'autre part $f'(N_1) = \lambda - 2kN_1 = -\lambda < 0$; l'état d'équilibre est stable ; il représente l'état asymptotique limite vers lequel tend N au bout d'un temps très grand.

On peut tracer l'allure de la courbe de variation de N à partir de ses comportements-limites. Pour t petit, N a l'allure de la fonction exponentielle croissante du modèle de Malthus, avec concavité positive, et pour t grand N doit tendre vers la valeur asymptotique $N_1 = \lambda/k$, ce qui nécessite un changement du signe de la concavité, donc un point d'inflexion. La position de celle-ci se trouve assez facilement ; il suffit de dériver l'équation d'évolution par rapport au temps ; on trouve : $\ddot{N} = \dot{N}(\lambda - 2kN)$; $\ddot{N} = 0$ lorsque $N = N_1/2$; on doit supposer $N_1 > 2N_0$. (Voir Figure.)



L'équation d'évolution peut être résolue exactement soit par la méthode de la séparation des variables, soit par le changement de fonction $y = 1/N$. La solution est :

$$N(t) = \frac{N_1}{1 + (\frac{N_1}{N_0} - 1)e^{-\lambda t}}.$$

Le point d'inflexion apparaît à l'instant $t_i = (1/\lambda)\ln(\frac{N_1}{N_0} - 1)$.

D'autres modèles plus élaborés ont été proposés plus tard pour améliorer les propriétés de modèle de Verhulst.

2. Populations en interaction

Système prédateurs-proies. Modèle de Lotka (1920) et de Volterra (1929). R : nombre de requins ; S : nombre de sardines. Équations couplées :

$$\frac{dS}{dt} = +aS - bSR,$$

$$\frac{dR}{dt} = -cR + dSR,$$

a, b, c, d étant des constantes positives. Les sardines ont un réservoir de nourriture presque infini ; sans les requins leur nombre pourrait augmenter indéfiniment (du moins sur une période assez longue tant que la nourriture et l'espace ne se réduisent pas) ; d'où le taux de croissance positive a. Sans les sardines, les requins disparaîtraient, d'où le taux de croissance négative $-c$. La présence des requins fait diminuer le nombre des sardines ; d'où le terme de couplage négatif $-bSR$ dans l'équation de S. La présence des sardines permet aux requins de se nourrir et d'accroître leur nombre ; d'où le terme de couplage positif $+dSR$ dans l'équation de R.

On a ici un système de deux équations différentielles couplées du 1^{er}ordre non-linéaires avec deux degrés de liberté.

Le système possède un premier état d'équilibre qui correspond à $S_1 = 0$ et $R_1 = 0$. On peut vérifier facilement, en développant linéairement les deux équations en S et en R (autrement dit en négligeant les termes quadratiques en RS) que celui-ci est instable. Par conséquent, ce système d'équations ne conduit jamais à l'extinction des deux espèces, même si elles se trouvent près du point d'extinction.

Un deuxième état d'équilibre, autre que zéro, existe :

$$S_1 = \frac{c}{d}, \qquad R_1 = \frac{a}{b}\,.$$

L'étude de l'évolution autour du point d'équilibre se fait en développant S et R respectivement autour de S_1 et R_1. On pose :

$$S(t) = S_1 + f(t), \qquad R(t) = R_1 + g(t),$$

et on garde dans les équations les termes linéaires en f et g. On trouve :

$$\frac{df}{dt} = -\frac{bc}{d}\,g, \qquad \frac{dg}{dt} = +\frac{ad}{b}\,f.$$

En éliminant g en fonction de f à partir de la première équation, on obtient :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -\omega^2 f, \qquad \omega^2 = ac.$$

C'est l'équation de l'oscillateur harmonique, dont la solution est :

$$f(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$

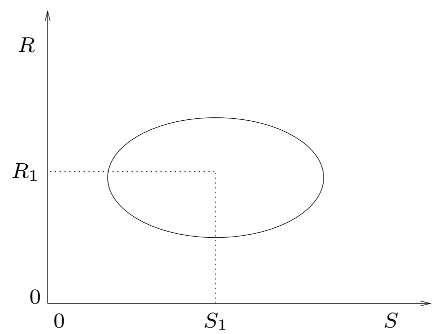
d'où on obtient aussi g :

$$g(t) = \frac{d}{b}\sqrt{\frac{a}{c}}\Big(A\cos(\omega t) - B\sin(\omega t)\Big).$$

f et g restent bornées au cours du temps ; l'état d'équilibre est stable. La trajectoire décrite dans le plan (S, R) s'obtient en éliminant t entre f et g :

$$f^2 + \frac{b^2 c}{d^2 a}\, g^2 = A^2 + B^2.$$

C'est l'équation d'une ellipse. (Voir Figure.) On a ainsi une évolution périodique des deux espèces de période $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{ac}$.



La solution exacte des deux équations couplées ne peut être obtenue analytiquement, d'où l'intérêt de l'étude de l'évolution autour de la position d'équilibre. On peut cependant montrer que le mouvement général reste périodique avec la même période T que celle obtenue plus haut. Ceci signifie que la trajectoire dans le plan (S, R) est toujours fermée et s'accomplit pendant une période T.

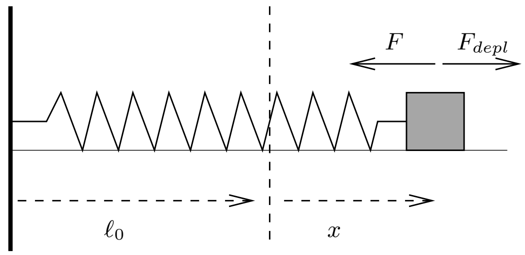
XII- Énergie

1. Travail

Effort déployé pour déplacer un objet d'une position à une autre en opposition à une une force extérieure F appliquée sur l'objet. Exemple du ressort. Ressort au repos ; si on veut allonger le ressort ou le comprimer, il faut vaincre la force de rappel du ressort. L'effort déployé dépend à la fois de l'intensité de la force extérieure et de la distance de déplacement.

Le *travail* est défini sous forme infinitésimale comme le produit de la force déployée avec le déplacement infinitésimal :

$$d\mathcal{T} = F_{depl}(x)dx.$$



Le travail total effectué pour déplacer l'objet de la position A à la position B est l'intégrale de cette quantité :

$$\mathcal{T}_{AB} = \int_A^B d\mathcal{T} = \int_{x_A}^{x_B} F_{depl}(x)dx.$$

En général, la force est un vecteur $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ dépendant du vecteur position $\mathbf{r}$. On peut déplacer l'objet dans une direction non-parallèle à $\mathbf{F}$. Dans ce cas, le travail infinitésimal est défini comme étant le produit scalaire du vecteur $\mathbf{F}_{depl}$ avec le vecteur déplacement $d\mathbf{r}$:

$$d\mathcal{T} = \mathbf{F}_{depl}(\mathbf{r}).d\mathbf{r}.$$

Exemples. Ressort. Force exercée par le ressort sur la masse à son extrémité : $F = -kx$ (x : écart à partir de la position de repos). On déploie une force opposée à F pour déplacer la masse de A à B ($x_B > x_A > 0$) : $F_{depl} = -F = +kx$.

$$\mathcal{T}_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} dx(kx) = \frac{k}{2}(x_B^2 - x_A^2).$$

Pesanteur. Force de la pesanteur : $F = -mg$ le long de l'axe Oz dirigé vers le haut. Force déployée pour soulever l'objet de z_A vers z_B : $F_{depl} = -F = mg$.

$$\mathcal{T}_{AB} = \int_{z_A}^{z_B} dz(mg) = mg(z_B - z_A).$$

Dimension : [Travail]=[Force×distance].

$$[\mathcal{T}] = [FL] = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2}.$$

2. Énergie potentielle

Après avoir déplacé l'objet de A à B (avec $\mathcal{T}_{AB} > 0$), on le lâche sans vitesse initiale. On constate que l'objet se déplace dans le sens opposé à son déplacement antérieur, attiré de nouveau par la force du ressort ou de la pesanteur. Tout se passe comme s'il avait emmagasiné le travail déployé par l'expérimentateur et l'utilisait pour le transformer en vitesse de déplacement.

Pour tenir compte de cet aspect, on introduit la notion d'*énergie*, qui est une grandeur ayant la même dimension que le travail, mais qui peut se manifester aussi sous d'autres formes. Pour le problème actuel, on définit l'*énergie potentielle* de l'objet, E_p, comme le travail accompli par l'expérimentateur pour déplacer l'objet sans accélération d'un point pris comme origine à un autre. (Dans ce cas $F_{depl} = -F$.)

$$E_p(x) - E_p(0) = \mathcal{T}_{0x} = \int_0^x F_{depl}(x')dx' = -\int_0^x F(x')dx',$$

F étant la force extérieure qui agit sur l'objet (force du ressort, de la pesanteur, etc.).

L'énergie potentielle en un point donnée dépend de sa valeur en un point-origine. On ne peut mesurer que des différences d'énergie potentielle. Le plus souvent on choisit la valeur d'origine égale à zéro.

Ressort :

$$E_p(x) = -\int_0^x F(x')dx' = -\int_0^x dx'(-kx') = \frac{1}{2}kx^2.$$

Pesanteur (axe Oz dirigé vers le haut) :

$$E_p(z) = -\int_0^z F(z')dz' = -\int_0^z dz'(-mg) = mgz.$$

Si on connaît l'énergie potentielle d'un objet, on peut en déduire la force qui s'exerce sur lui :

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}.$$

Dimension : $[E_p] = ML^2T^{-2}$.

3. Énergie cinétique

L'*énergie cinétique* est une énergie associée à la vitesse. On constate que la quantité $m\mathbf{v}^2$ a la dimension d'une énergie : $[m\mathbf{v}^2] = ML^2T^{-2}$. Définition de l'énergie cinétique E_c :

$$E_c(v) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2.$$

Dépend uniquement du mouvement de l'objet et sa définition est indépendante des forces s'exerçant sur lui.

Ressort : $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ (le long de Ox). Pesanteur : $E_c = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$ (le long de Oz).

4. Conservation de l'énergie totale

L'énergie peut aussi se manifester sous d'autres formes, telles que énergie électromagnétique, chimique, nucléaire, thermodynamique, de masse, etc. L'énergie totale d'un système est la somme de toutes les énergies en présence. Néanmoins, si dans un processus certaines formes d'énergie ne se manifestent pas ou restent constantes, on peut les ignorer. En mécanique, on définit l'*énergie mécanique*, E_m, comme la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$E_m = E_c + E_p.$$

En l'absence des autres formes d'énergie, on peut identifier l'énergie mécanique avec l'énergie totale E du système :

$$E_m = E.$$

Ressort :

$$E_m = E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

Pesanteur (axe Oz dirigé vers le haut) :

$$E_m = E = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz.$$

Lorsque la force qui s'exerce sur l'objet dépend uniquement de sa position, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, on dit qu'il s'agit d'une *force conservative*. Dans le cas général, la force pourrait aussi dépendre de la vitesse (frottement) et du temps : $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$.

Lorsque la force est conservative, l'énergie totale (énergie mécanique) est conservée (reste constante) au cours du temps, c'est-à-dire au cours du mouvement de l'objet.

Cas unidimensionnel avec variable x.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x).$$

Dériver E par rapport au temps :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{d\dot{x}^2}{dt} + \frac{dE_p(x)}{dt}.$$

Appliquer la règle de la dérivation des fonctions de fonctions ; l'énergie cinétique et l'énergie potentielle dépendent implicitement du temps à travers leurs dépendances respectives de $\dot{x}$ et de x.

$$\frac{d\dot{x}^2}{dt} = \frac{d\dot{x}^2}{d\dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt} = 2\dot{x}\ddot{x};$$

$$\frac{dE_p(x)}{dt} = \frac{dE_p(x)}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dE_p(x)}{dx}\dot{x} = -F(x)\dot{x}.$$

On obtient :

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}\Big(m\ddot{x} - F(x)\Big) = 0,$$

l'annulation provenant de l'utilisation de l'équation du mouvement. En résumé :

$$\frac{dE}{dt} = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad E = \text{const.}$$

La valeur de cette constante est fixée par les conditions initiales :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 + E_p(x_0).$$

Ressort : $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 + E_p(x_0)$. Pesanteur : $E = \frac{1}{2}\dot{z}^2 + mgz = \frac{1}{2}\dot{z}_0^2 + mgz_0$.

La loi de conservation de l'énergie n'est pas applicable en présence de forces dépendant de la vitesse ou du temps. Dans ce cas, l'énergie mécanique du système varie au cours du temps. En particulier, en présence de forces d'amortissement, l'énergie mécanique diminue au cours du temps.

On peut utiliser un calcul similaire pour évaluer la variation de l'énergie mécanique lorsqu'il existe des forces dépendant de la vitesse ou du temps. L'équation du mouvement est :

$$m\ddot{x} = F(x) + F_f(x, \dot{x}, t),$$

où $F(x)$ représente la force conservative et $F_f(x, \dot{x}, t)$ la force de freinage et celle dépendant du temps. L'énergie mécanique est : $E_m = E_c + E_p(x)$, où l'énergie potentielle $E_p(x)$ est calculée à partir de $F(x)$ uniquement ; on a $F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}$. La variation de l'énergie mécanique entre un point A et un point B est alors égale au travail effectué par les forces dépendant de la vitesse ou du temps :

$$\Delta E_{m,AB} = E_m(B) - E_m(A) = \int_A^B dx F_f(x, \dot{x}, t) = \int_A^B dt \dot{x} F_f(x, \dot{x}, t).$$

Pour le calcul de l'intégrale de F_f, il faut exprimer x et $\dot{x}$ en fonction du temps (solutions de l'équation du mouvement) et faire l'intégration par rapport au temps.

5. Domaines possibles du mouvement

On utilise la loi de conservation de l'énergie.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x) = \text{const.}, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - E_p(x).$$

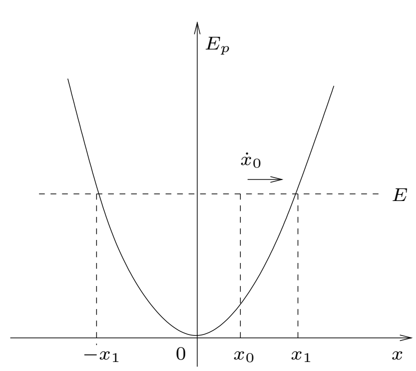
Or, l'énergie cinétique est une quantité positive ou nulle :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E - E_p(x) \geq 0.$$

Le mouvement ne peut avoir lieu que dans les domaines où cette inégalité est vérifiée. Tracer la courbe de $E_p(x)$ en fonction de x ; tracer la droite horizontale E =const. (fixée par les conditions initiales) ; délimiter les domaines où $E_p(x) \leq E$. Aux points où $E_p = E$, on a $E_c = 0$, c'est-à-dire $\dot{x} = 0$.

Exemples : Ressort.

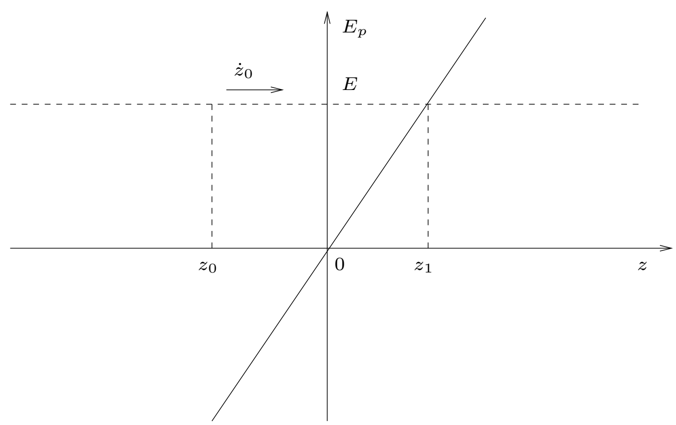
$$E - E_p(x) = E - \frac{1}{2}kx^2 \geq 0.$$



La courbe de $E_p(x)$ est une parabole symétrique par rapport à l'axe $x = 0$. Les points d'intersection de E et de E_p ont pour abscisses $-x_1$ et $+x_1$, avec $x_1 = \sqrt{2E/k}$. Le mouvement a lieu dans l'intervalle fini $[-x_1, x_1]$. On dit que le mouvement est *confiné* ou que la particule de masse m se trouve dans un *état lié*. Si on lance la particule de la position x_0, avec $0 < x_0 < x_1$, avec une vitesse initiale positive ($\dot{x}_0 > 0$), elle se dirige vers la position x_1 (élongation du ressort). En x_1, sa vitesse s'annule et change ultérieurement de signe ; la masse se dirige dans le sens négatif (compression du ressort), passe par $x = 0$ et atteint la position $-x_1$, où la vitesse s'annule et change ensuite de signe, le ressort reprenant son mouvement d'élongation, etc. Pour $x = \pm x_1$, $\dot{x} = 0$ et l'énergie potentielle a sa valeur maximale ; pour $x = 0$, l'énergie potentielle est nulle (valeur minimale) et l'énergie cinétique, donc le module de la vitesse, a sa valeur maximale.

Pesanteur.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz, \quad E_p(z) = mgz, \quad \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = E - mgz \geq 0.$$



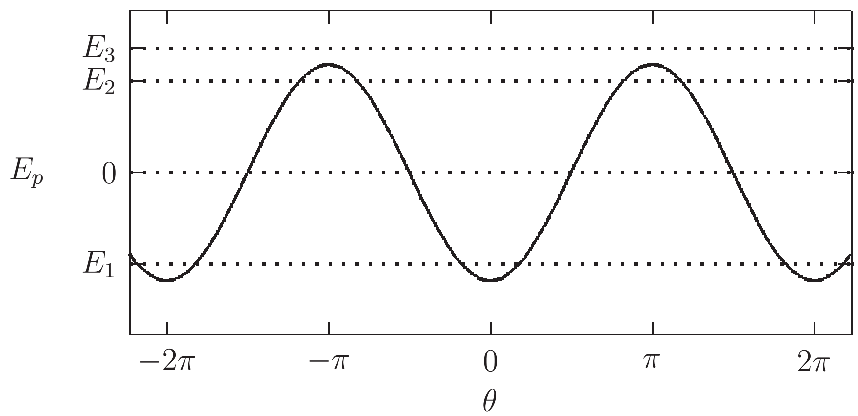
$E_p(z) \leq E$ pour $z \leq z_1 = E/(mg)$. z peut prendre toutes les valeurs inférieures à z_1 jusqu'à $-\infty$. Si on lance la particule de l'altitude z_0 avec une vitesse initiale positive (donc vers le haut), elle monte jusqu'à l'altitude z_1, où sa vitesse s'annule ; puis la vitesse change de signe et devient négative ; la particule descend alors vers le bas. Le mouvement n'est pas confiné à une région finie de l'espace ; on dit que la particule se trouve dans un *état de diffusion* ; elle peut s'éloigner à des distances infinies ou provenir, dans d'autres cas de forces, de l'infini.

6. Équilibre et stabilité

On peut aussi analyser les questions d'équilibre et de stabilité avec l'énergie. Soit x_0 une position d'équilibre ; la condition $F(x_0) = 0$ signifie

$$\frac{dE_p(x)}{dx}\Big|_{x=x_0} = 0.$$

L'énergie potentielle doit être extrémale (minimale ou maximale). On choisit au voisinage de cette position une valeur de l'énergie totale E et on étudie le domaine possible du mouvement. Si le mouvement est confiné autour de la position d'équilibre, il y a stabilité ; si le mouvement n'est pas confiné dans le voisinage de la position d'équilibre, il y a instabilité.



Exemple du pendule. L'énergie potentielle, exprimée en fonction de θ (angle que fait la tige de longueur ℓ avec la verticale descendante) est : $E_p(\theta) = -mg\ell\cos\theta$. Extréma : $\theta = 0,\ \pm\pi$, etc. Autour de $\theta = 0$ ($E = E_1$), le mouvement est confiné $\Longleftrightarrow$ stabilité. Autour de $\theta = \pi$ ($E = E_2$ ou $E = E_3$), le mouvement n'est pas confiné au voisinage immédiat $\Longleftrightarrow$ instabilité.

Dans le cas du ressort, le mouvement est confiné autour de la position d'équilibre $x = 0 \Longleftrightarrow$ stabilité.

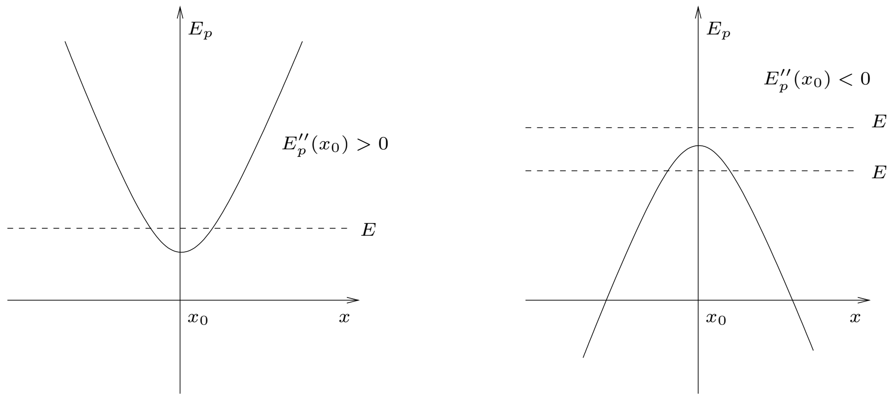
On étudie le mouvement du système autour d'une position d'équilibre. $F(x)$: force conservative agissant sur un objet et donnant lieu à une énergie potentielle $E_p(x)$. Soit x_0 une position d'équilibre ; c'est un extrêmum local de E_p. On suppose que $|x - x_0|$ reste petit devant une longueur caractéristique du système et on fait un développement limité de $E_p(x)$ autour de x_0 :

$$E_p(x) = E_p(x_0) + (x - x_0)E_p'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 E_p''(x_0) + \cdots \ .$$

C'est *l'approximation des petits mouvements*. Comme $E_p'(x_0) = 0$, on obtient :

$$E_p(x) \simeq E_p(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 E_p''(x_0).$$

C'est l'équation d'une parabole d'axe $x = x_0$. $E_p''(x_0) > 0$ signifie concavité vers le haut ; x_0 minimum local de E_p ; $\Longrightarrow$ confinement et stabilité. $E_p''(x_0) < 0$ signifie concavité vers le bas ; x_0 maximum local de E_p ; $\Longrightarrow$ mouvement non-confiné dans le voisinage et instabilité.



Force agissant sur le système dans l'approximation précédente :

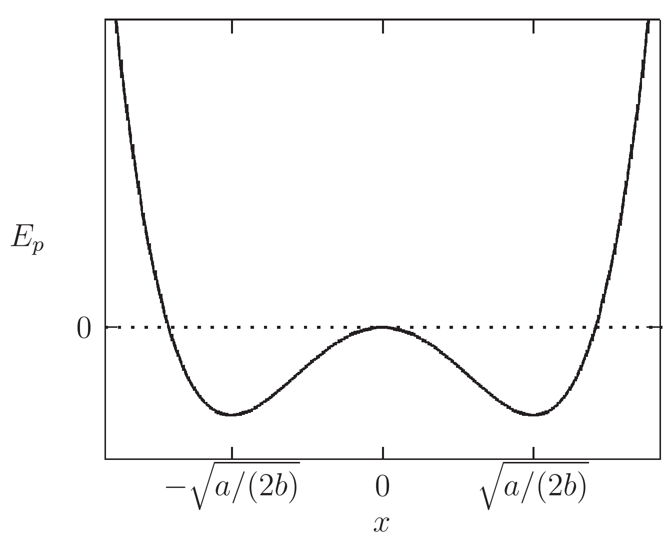
$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} = -(x - x_0)E''_p(x_0).$$

Si $E''_p(x_0) > 0$, $F(x)$ dirigée vers x_0 ; force attractive ; stabilité. Si $E''_p(x_0) < 0$, $F(x)$ dirigée de x_0 vers l'extérieur ; force répulsive ; instabilité.

Exemple.

$$E_p(x) = -ax^2 + bx^4, \qquad a > 0,\ b > 0.$$

L'énergie potentielle a trois extréma locaux ; $x_0 = 0$ (maximum local, position d'équilibre instable), $x_0 = \pm\sqrt{a/(2b)}$ (minima, positions d'équilibre stables). Le développement autour de $x_0 = 0$ s'écrit : $E_p(x) \simeq -ax^2$; le développement autour des minima s'écrit : $E_p(x) \simeq -\frac{a^2}{4b} + 2a(x \mp \sqrt{\frac{a}{2b}})^2$.



Référence

Ce texte est le résumé d'un cours initialement conçu et rédigé par **Jean-Pierre Maillet** et intitulé "Lois d'évolution de la physique ... et d'ailleurs" (224 pages), paru sous la forme d'un polycopié.